This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, иринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.

- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.

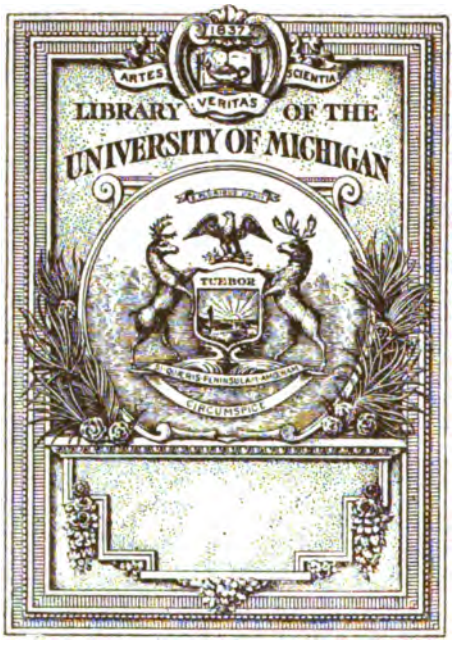
- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.

- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`

B 448966



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
261
.K87

158

Alexander Ziwet 9,4

To C. J. Joly
with the kindest regards
of author.

ПРОЭКТИВНАЯ ТЕОРІЯ ВЕКТОРОВЪ

А. П. Котельникова

Привать-доцента Императорскаго Казанскаго Университета

КАЗАНЬ
Типо-Литографія Императорскаго Университета
1899

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

(Извѣстія Каз. Физ.-Мат. Общества, 2 серія, томы VIII и IX).

From the
Estate of
Prof. Study
3-18-30

> Въ природѣ мы познаемъ собственно только движеніе, безъ котораго чувственныя впечатлѣнія не возможны. Итакъ всѣ прочія понятія, напримѣръ Геометрическія, произведены нашимъ умомъ искусственно, будучи взяты въ свойствахъ движенія; а потому пространство, само собой, отдѣльно, для насъ не существуетъ. Послѣ чего въ нашемъ умѣ не можетъ быть никакого противорѣчія, когда мы допускаемъ, что нѣкоторыя силы въ природѣ слѣдуютъ одной, другія своей особой Геометріи. (Н. И. Лобачевскій. Новыя начала. Полное собр.соч., т. I, стр. 226—227).
>
> Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird. (Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Werke, p. 268).

Полная аналогія между геометрическими построеніями кинематики и динамики твердаго тѣла, существованіе которой было доказано въ 1834 году Poinsot въ его классическомъ мемуарѣ „Théorie nouvelle de la rotation des corps“, побудила авторовъ новыхъ трактатовъ по механикѣ [1] выдѣлить общую часть ученія о движеніи твердаго тѣла и о силахъ къ нему приложенныхъ въ особый отдѣлъ подъ названіемъ теоріи векторовъ. Изслѣдованія новыхъ геометровъ убѣждаютъ насъ, что указанная Poinsot аналогія должна существовать и въ механикѣ твердаго тѣла неевклидовыхъ пространствъ, и настоящая моя работа представляетъ попытку изложить теорію векторовъ, опираясь на проэктивную геометрію, которая, какъ это показалъ F. Klein, не зависитъ отъ теоріи параллельныхъ. Я развиваю при этомъ теорію векторовъ на нѣсколько иныхъ началахъ, чѣмъ тѣ, которыя были приняты другими авторами, и я постараюсь теперь вкратцѣ указать на основныя идеи моей работы и

[1] Укажу, напримѣръ, на трактаты Schell'я и Appell'я.

положеніе, занимаемое ей по отношенію къ другимъ работамъ по неевклидовой механикѣ.

Существуетъ два способа выводить законъ сложенія силъ. Одинъ, основанный на сложеніи движеній, принадлежитъ Newton'y и Varignon'y. Другой, разсматривая сложеніе силъ какъ операцію коммутативную, ассоціативную и подчиняющуюся еще нѣкоторымъ дополнительнымъ условіямъ, ведетъ свое начало съ извѣстнаго мемуара D. Bernoulli „Examen principiorum Mechanicae et demonstrationes Geometricae de compositione et resolutione virium", опубликованномъ въ 1828 году въ I томѣ „Comentarii Academiae Petropolitanae". D. Bernoulli, критикуя предложенное Varignon'омъ и Newton'омъ доказательство параллелограмма силъ, видитъ недостатокъ этого доказательства въ томъ, что оно опирается на *опытныя* истины: принципъ пропорціональности между силой и приращеніемъ скорости и принципъ независимости одновременнаго дѣйствія силъ, между тѣмъ какъ законъ параллелограмма, по мнѣнію D. Bernoulli, представляетъ собой истину столь же необходимую, какъ истины геометрическія. „Aliter vero se res habet cum principio compositionum virium" говоритъ D. Bernoulli; „illius enim demonstationem inveni plane geometricam, cujus vi demum cognovi, theoremata statica non minus *necessario vera* esse, quam sunt geometrica" [1].

Геометрическое доказательство D. Bernoulli опирается на слѣдующія предположенія.

„I. Всякія силы можно замѣнить имъ эквивалентными. II. Двѣ силы одинаково направленныя эквивалентны одной равной ихъ суммѣ, и двѣ силы направленныя въ противоположныя стороны эквивалентны одной равной ихъ разности.... III. Сила эквивалентная двумъ равнымъ силамъ одинаково наклонена къ той и другой, т. е. ея направленіе дѣлитъ пополамъ уголъ, заключенный между направленіями двухъ силъ...." [2].

Исходя изъ этихъ предположеній, D. Bernoulli посвящаетъ большую часть своего мемуара доказательству параллелограмма силъ для того частнаго случая, когда силы равны (ромбъ силъ), и къ нему весьма просто сводитъ задачу сложенія какихъ угодно силъ приложенныхъ къ одной точкѣ. D'Alembert въ мемуарѣ „Démonstation du principe de la composition des Forces" [3] значительно упростилъ доказатель-

[1] l. c., p. 127. [2] l. c., p. 134. [3] Opuscules mathématique, 1761, T. I, p. 169—179.

ство D. Bernoulli и сдѣлалъ его въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ болѣе строгимъ. Другіе ученые [1] видоизмѣняли впослѣдствіи доказательства D. Bernoulli и D'Alembert'a различнымъ образомъ.

Въ 1761 году во II томѣ „Miscellanea Taurinensia" былъ опубликованъ мемуаръ „Sur les principes fondamentaux de la mécanique" par M. le Chev. Daviet de Foncenex, мемуаръ, который, однако, по словамъ Delabre'a [2], принадлежитъ Lagrange'y. Здѣсь въ первый разъ мы встрѣчаемся съ аналитическимъ доказательствомъ параллелограмма силъ и принципа рычага, которое подобно доказательствамъ D. Bernoulli и Archimedes'a опирается на частныя предложенія: равнодѣйствующая двухъ равныхъ силъ равняется діагонали ромба на нихъ построенной, если силы приложены къ одной точкѣ, и суммѣ силъ, если силы приложены къ различнымъ точкамъ и направленія ихъ перпендикулярны къ линіи, соединяющей точки приложенія. Эти двѣ теоремы D. de Foncenex доказываетъ различнымъ образомъ. Но обобщая нѣсколько построенія D. de Foncenex'a, можно обоимъ предложеніямъ дать совершенно тождественныя доказательства, какъ показалъ D'Alembert [3], сведя оба доказательства къ рѣшенію функціональнаго уравненія

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y), \qquad (1)$$

которое обыкновенно, но неправильно, приписываютъ Poisson'y.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть къ точкѣ O приложены двѣ силы OB и OB' равныя P. Равнодѣйствующая ихъ R будетъ направлена по линіи OD, дѣлящей пополамъ уголъ заключенный между OB и OB' (третья гипотеза D. Bernoulli), который, предположимъ, равняется $2x$, и будетъ представлять собой нѣкоторую функцію отъ P и x: $R=f(P,x)$. „Такъ какъ сила R той же природы какъ и сила P, то необходимо, чтобы она содержала то же число измѣреній; что даетъ $R=Pf(x)$,

---

[1] Cauchy: Sur la resultante et les projections de plusieurs forces appliquées à un seul point. Exercices mathématiques, 1826, p 29—43. Также Moigno: Leçons de Mécanique analytique, Paris, 1868, p. 6—18. Aimé: Démonstration du parallélogramme des forces. Journal des mathématiques pures et appliquées, T. I, 1836, p. 335—338. [2] Oeuvres de Lagrange, T. I, p. XI. [3] Mémoire sur les principes de la Mécanique. Opuscules mathématiques, T. VI, p. 371. Этого второго мемуара я не имѣлъ возможности видѣть. Цитату заимствую у A. Genocchi: Sur un mémoire de Daviet de Foncenex, p. 374.

ибо измѣреніе x равняется нулю“ [1]. Такимъ образомъ задача приводится къ разысканію функціи $f(x)$. Съ цѣлью опредѣлить эту функцію проведемъ черезъ точку O по порядку линіи OC,OB,OA,OA',OB',OC' такъ, чтобы углы между OC и OB, OB и OA, OA' и OB', OB' и OC' равнялись бы нѣкоторой величинѣ y, а $\angle BOB'=2x$. Предположимъ, что по линіямъ OC,OA,OA' и OC' дѣйствуютъ четыре равныя P силы. Ихъ равнодѣйствующую мы можемъ построить двумя способами: во-первыхъ, складывая OA съ OC и OA' съ OC', мы получимъ двѣ силы равныя $Pf(y)$, дѣйствующія по линіямъ OB и OB', которыя даютъ равнодѣйствующую $Pf(y)f(x)$ по направленію OD, дѣлящей пополамъ углы COC', BOB', AOA'; во-вторыхъ, складывая силы OA съ OA' и OB съ OB', мы получаемъ двѣ силы по направленію OD: $Pf(x+y)$ и $Pf(x-y)$ эквивалентныя одной $Pf(x+y)+Pf(x-y)$. Итакъ

$$Pf(x+y)+Pf(x-y)=Pf(x)f(y),$$

откуда уравненіе (1).

Предположимъ затѣмъ, что мы хотимъ найти равнодѣйствующую дзухъ равныхъ силъ P, лежащихъ въ одной плоскости, перпендикулярныхъ къ линіи BB', соединяющей точки приложенія B и B', и направленныхъ въ одну сторону. Равнодѣйствующая ихъ R пройдетъ черезъ середину D линіи BB', которая, предположимъ равняется $2x$, будетъ перпендикулярна къ линіи BB' (гипотезы Archimedes'a) и будетъ нѣкоторою функціей отъ P и x: $R=f(P,x)$, которая и теперь, какъ и въ случаѣ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, должна быть вида $Pf(x)$. Для опредѣленія функціи $f(x)$ возьмемъ на прямой попорядку шесть точекъ C,B,A,A',B',C', такъ, чтобы $CB=BA=A'B'=B'C=y$ и $BB'=2BD=2x$, и приложимъ къ точкамъ C,A,A',C' четыре равныя P и перпендикулярныя къ CC' силы. Складывая ихъ въ одну равнодѣйствующую двумя различными способами, мы получимъ снова, также какъ и раньше, функціональное уравненіе (1).

Уравненія, которыя получаетъ D. de Foncenex для опредѣленія функціи $f(x)$ всѣ представляютъ собой частные случаи уравненія D'Alembert'a. Для силъ приложенныхъ къ одной точкѣ D. de Foncenex даетъ два уравненія: одно дифференціальное

$$d^2f=kdx^2,$$

---

[1] Daviet de Foncenex, l. c., p. 306.

другое въ конечныхъ разностяхъ

$$p_{n+2}-kp_{n+1}+p_n=0,$$

которыя получаются изъ уравненія D'Alembert'a, если одинъ разъ будемъ считать $y=dx$ величиной безконечно малой, а въ другой разъ положимъ

$$y=\pi/2\nu,\ x=(n+1)y,\ f(my)=p_m,\ \nu=\text{цѣлому числу}.$$

Оба уравненія приводятъ D. de Foncenex'a къ одному и тому же рѣшенію

$$f(x)=2\cos hx,$$

гдѣ h произвольная постоянная, которая затѣмъ опредѣляется условіемъ, что двѣ равныя силы могутъ имѣть равнодѣйствующую равную нулю только въ томъ случаѣ, когда онѣ направлены въ противоположныя стороны и $f(x)$ можетъ быть равно нулю только при $\pi/2$. Это условіе даетъ $h=1$, $f(x)=2\cos x$, откуда слѣдуетъ правило ромба и законъ сложенія силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.

Для силъ перпендикулярныхъ къ линіи, соединяющей точки ихъ приложенія, D. de Foncenex выводитъ уравненіе

$$f(2x)+2=[f(x)]^2,$$

получающееся изъ (1), если положимъ въ немъ $x=y$. D. de Foncenex думалъ, что этому уравненію можно удовлетворить, только полагая $f(x)=2$. Если бы это было такъ, то принципъ рычага былъ бы доказанъ. Но D'Alembert въ цитированномъ выше мемуарѣ „Mémoire sur les principes de la Mécanique“ показываетъ, что послѣднее уравненіе D. de Foncenex'a имѣетъ болѣе общее рѣшеніе

$$f(x)=b^x+b^{-x}=2\cos[\log b.x],$$

гдѣ, какъ полагалъ D'Alembert, b должно быть постоянно, но въ дѣйствительности можетъ быть функціей отъ x, которая получаетъ прежнее значеніе, когда x сдѣлается равнымъ $2x$, т. е. произвольной функціей отъ

$$\sin 2\pi\frac{\log x}{\log 2},\quad \cos 2\pi\frac{\log x}{\log 2},$$

какъ это впослѣдствіи обнаружилъ Laplace[1]. Рѣшеніе Laplace'a однако не удовлетворяетъ болѣе общему уравненію D'Alembert'a и потому не соотвѣтствуетъ разсматриваемой задачѣ механики.

Уравненіе D'Alembert'a имѣетъ только одно рѣшеніе

$$f(x)=2\cos hx,$$

гдѣ h произвольная постоянная. Самъ D'Alembert получаетъ[2] его методомъ дифференцированія даннымъ имъ ранѣе[3] въ 1750 году для рѣшенія болѣе общаго функціональнаго уравненія

$$\Psi(t-as)+\Psi(t+as)=\Delta t\Gamma s,$$

гдѣ a постоянная, а Ψ,Δ,Γ неизвѣстныя функціи. Другіе пріемы для рѣшенія уравненія D'Alembert'a были даны впослѣдствіи Poisson'омъ[4] и Cauchy[5].

Послѣ того какъ рѣшено уравненіе D'Alembert'a, остается найти произвольную постоянную h. Я упоминалъ уже выше, что опредѣленіе h, когда силы приложены къ одной точкѣ, не представляетъ затрудненій. Если же равныя силы приложены къ точкамъ различнымъ и дѣйствуютъ по прямымъ перпендикулярнымъ къ линіи соединяющей точки ихъ приложенія, то тѣ допущенія, которыя положены въ основаніе доказательства Archimedes'a (аналогичныя съ предположеніями D. Bernoulli) уже не даютъ намъ никакихъ средствъ опредѣлить постоянную h. Затрудненіе, съ которымъ мы здѣсь встрѣчаемся, той же природы, какъ тѣ трудности, которыя встаютъ предъ нами, когда мы пытаемся доказать знаменитый постулатъ Эвклида: опредѣлить постоянную h—значитъ опредѣлить кривизну пространства. Это показалъ въ первый разъ Итальянскій ученый A. Genocchi.

Мемуаръ A. Genocchi появился въ 1869 году. Годъ 1869, два года ему предшествующіе и три года за нимъ слѣдующіе представляютъ собой замѣчательный періодъ въ исто-

---

[1] Recherches sur l'integration des Equations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la theorie des hasards. Mémoires présentés à l'Académie Royale de Paris par divers Savants, 1773, p. 74. [2] Memoire sur les principes de la mécanique. [3] Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration. Histoire de l'Académie Royal de Berlin, 1750, T. VI, p. 356—360. [4] Traité de mécanique. Первое изданіе 1811, Tome I; p. 14, второе изданіе, 1833, Tome I, p. 45—50. [5] Алгебраическій анализъ, переводъ русскій, p. 107—115.

ріи развитія не только механики но и геометріи неевклидовыхъ пространствъ. Въ этотъ небольшой промежутокъ времени появляются знаменитые мемуары Riemann'a, Beltrami, Helmholtz'a и F. Klein'a. Въ началѣ его почти одновременно дѣлаютъ свои сообщенія, посвященныя механикѣ неевклидовыхъ пространствъ, A. Genocchi въ Туринской Академіи и de Tilly въ Бельгійской. Въ серединѣ его въ Германіи печатается мемуаръ E. Scheringa о силѣ тяготѣнія въ пространствѣ Лобачевскаго. Наконецъ въ концѣ его почти одновременно появляются въ Германіи и Англіи мемуары F. Lindemann'a и W. K. Clifford'a, которые трактуютъ механику уже съ новой точки зрѣнія A. Cayley и F. Klein'a и имѣли большое вліяніе на всю позднѣйшую литературу.

Повидимому одна и та же мысль побудила A. Genocchi и de Tilly обратиться къ изслѣдованію механики неевклидовыхъ пространствъ, а именно вопросъ, не впадемъ ли мы въ противорѣчіе съ принципами механики, если отвергнемъ подобно Н. И. Лобачевскому XI постулатъ Эвклида или примемъ вмѣстѣ Riemann'омъ, что прямая линія конечна. Размышленія этихъ двухъ ученыхъ привели ихъ однако къ различнымъ убѣжденіямъ, которыя они оба горячо защищали въ своихъ сочиненіяхъ [1]. „Je doutais donc et je doute encore“ говоритъ A. Genocchi [2] „qu'on ne puisse absolument démontrer le postulatum d'Euclide, quoique, bien entendu, je n'aie pas sous la main une démonstration rigoureuse de ce principe. J'ai seulement laissé entrevoir qu'il me paraît plus probable qu'on puisse fonder une démonstration rigoureuse sur des notions de statique ou de cinématique que sur de pures notions de géométrie“. „Dans la géométrie et dans la mécanique théoriques, rien ne s'oppose“ говоритъ de Tilly [3] „à admettre que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit moindre que deux angles droits“.

A. Genocchi первому принадлежитъ мысль сравнить выраженіе равнодѣйствующей $2P\cos hx$ двухъ равныхъ силъ P, дѣйствующихъ перпендикулярно къ линіи, соединяющей точки приложенія, которое даетъ методъ D. de Foncenex'a усовершенствованный D'Alembert'омъ, съ выраженіемъ, которое можно получить при помощи извѣстнаго построенія теоріи сходящихся силъ. „Пусть приложены къ точкамъ

[1] См. прилагаемый списокъ мемуаровъ. [2] Lettre a M. Quetelet sur diverses questions mathématiques, p. 189—190. [3] Etudes de Mécanique abstraite, p. 97 отдѣльнаго оттиска.

A и A' въ одной плоскости двѣ равныя силы P и P', перпендикулярныя къ прямой AA', и двѣ другія равныя силы Q и Q' дѣйствующія по той же прямой, причемъ первыя направлены въ одну сторону, а послѣднія въ противоположныя: эти двѣ силы Q и Q' взаимно уничтожатся и равнодѣйствующая четырехъ силъ будетъ такова же какъ и двухъ силъ P и P'; она будетъ слѣдовательно перпендикулярна къ прямой AA' и пройдетъ черезъ ея средину B. Пусть R равнодѣйствующая P и Q, R' равнодѣйствующая P' и Q': когда P и P' даны, то можно опредѣлить Q и Q' такимъ образомъ, чтобы направленія этихъ равнодѣйствующихъ проходили черезъ данную точку C перпендикуляра (къ AA') BC; кромѣ того ихъ дѣйствіе изобразится одной силой $Pf(x)$ направленной по BC, гдѣ $x=AB$. Но называя черезъ α и β углы $ABC=BA'C$ или $QAR=Q'A'R'$, и ACB или $A'CB$, мы имѣемъ

$$R=R'=\frac{Q}{\cos\alpha}=\frac{P}{\sin\alpha}$$

и равнодѣйствующая равныхъ силъ R и R', направленія которыхъ образуетъ уголъ 2β, будетъ $2R\cos\beta$. Отсюда слѣдуетъ

$$Pf(x)=2R\cos\beta=2P\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\text{“}\ ^{1}$$

или

$$\cos hx\ \sin\alpha=\cos\beta$$

—соотношеніе между углами α и β прямоугольнаго при точкѣ B треугольника ABC и стороной его $x=AB$ противоположной съ угломъ β.

„Рѣшеніе Foncenex'a соотвѣтствуетъ частному случаю $h=0$; и слѣдовательно мы будемъ имѣть $\cos\beta=\sin\alpha$, т. е. углы α и β дополнительны. Мы будемъ имѣть такимъ образомъ треугольникъ ABC, въ которомъ сумма угловъ равняется двумъ прямымъ, чего достаточно чтобы установить постулатъ Эвклида и геометрію Эвклидову.

Можно напротивъ предположить, что h отлично отъ нуля. Тогда, если положимъ $h=\sqrt{-1}/r$ съ дѣйствительнымъ r, та же формула даетъ намъ геометрію Лобачевскаго или неевклидову *гиперболическую,* называемую также *псевдосферической.*

---

[1] Sur un Mémoire Daviet de Foncenex et sur les Géométries Non-Euclidiens, p. 373—374.

Возможны еще другіе предположенія относительно h. Можно положить $h=1/r$ съ дѣйствительнымъ r: полученное соотношеніе будетъ тожественно съ формулой сферической тригонометріи, т. е. съ извѣстнымъ соотношеніемъ между двумя углами и стороной прямоугольнаго треугольника и r будетъ радіусомъ сферы. Мы приходимъ такимъ образомъ къ геометріи *сферической* или *эллиптической*.

Вотъ какимъ образомъ эти три геометріи, евклидова или *параболическая*, неевклидова гиперболическая и неевклидова эллиптическая, вытекаютъ изъ одной и той же формулы, къ которой приводятъ насъ вопросы, изучаемые въ мемуарѣ Foncenex'a" [1].

Къ подобнымъ же результатамъ приходитъ и de Tilly, изучая кинематику твердаго тѣла. Отвергая XI постулатъ Эвклида и предполагая, что прямая безконечна, въ своемъ большомъ мемуарѣ „Etudes de Mécanique abstraite" de Tilly показываетъ, что кинематика твердаго тѣла приводитъ насъ или къ формуламъ Эвклидова пространства, или къ формуламъ пространства Лобачевскаго. Эти формулы de Tilly получаетъ весьма просто помощью закона сложенія скоростей, которыми одновременно обладаетъ движущаяся точка. Предположивъ, что составная скорость пропорціональна составляющимъ, отношеніе составной скорости къ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ составляющихъ de Tilly называетъ кинематическимъ косинусомъ угла между направленіемъ составной и составляющей и кинематическимъ синусомъ дополнительнаго угла. Введя затѣмъ новое предположеніе [2], что сложеніе скоростей обладаетъ ствойствомъ коммутативности и ассоціативности, онъ выводитъ функціональныя уравненія для кинематическихъ косинуса и синуса и показываетъ тожество этихъ функцій съ обыкновенными косинусомъ и синусомъ. Такимъ образомъ de Tilly приходитъ къ тому же закону сложенія скоростей, который мы имѣемъ и въ Эвклидовомъ пространствѣ.

Во избѣжаніе недоразумѣній я долженъ здѣсь оговориться. Законъ сложенія силъ и скоростей въ Эвклидовомъ пространствѣ представляется въ двухъ различныхъ формахъ: въ геометрической, въ каковомъ случаѣ онъ называется закономъ параллелограмма, и въ аналитической, когда онъ выражается совокупностью уравненій

---

[1] l. c., p. 375. [2] Этого предположенія de Tilly явно не формулируетъ.

$$\frac{P}{\sin(RQ)} = \frac{Q}{\sin(PR)} = \frac{R}{\sin(PQ)}$$

$$(PR)+(RQ)=(PQ)$$

гдѣ P,Q суть величины составляющихъ, R—равнодѣйствующей, а (PQ), (RQ), (PR) углы между направленіями составляющихъ и равнодѣйствующей. Въ пространствахъ неевклидовыхъ нѣтъ параллелограмма, и по примѣру de Tilly и другихъ, говоря, что скорости и силы въ неевклидовыхъ пространствахъ складываются по тому же закону, какъ и въ пространствѣ Эвклида, будемъ подразумѣвать аналитическое выраженіе закона сложенія. Къ этому замѣчанію мы еще вернемся впослѣдствіи.

Переходя къ изученію кинематики, de Tilly прежде всего указываетъ на то, что твердое тѣло можетъ имѣть въ пространствѣ Лобачевскаго вращательное движеніе, при которомъ точки лежащія на одной прямой, оси вращенія, остаются неподвижными, и поступательное движеніе, при которомъ не измѣняютъ своего положенія плоскости, проходящія чрезъ прямую, директрису поступательнаго движенія. Важно замѣтить, что теперь у поступательнаго движенія только одна директриса, тогда какъ въ Эвклидовомъ пространствѣ всякая директриса можетъ быть замѣнена другой съ ней параллельной. Сложеніемъ безконечно малыхъ поступательныхъ и вращательныхъ движеній, у которыхъ оси лежатъ въ одной плоскости, de Tilly занимается довольно подробно. Онъ изслѣдуетъ главнымъ образомъ слѣдующіе случаи: 1) оси (директрисы) сходятся въ одной точкѣ, 2) перпендикулярны къ одной прямой и 3) параллельны, причемъ между законами сложенія поступательныхъ и вращательныхъ движеній, обнаруживается аналогія болѣе полная, чѣмъ въ Эвклидовомъ пространствѣ.

Въ главѣ, посвященной статикѣ, de Tilly находитъ законъ сложенія силъ приложенныхъ къ одной точкѣ совершенно тѣмъ же способомъ, какъ раньше онъ опредѣлялъ составную скорость точки по ея составляющимъ. Допуская затѣмъ, что дѣйствіе силы съ перемѣщеніемъ точки приложенія вдоль прямой, по которой дѣйствуетъ сила, не измѣняется, de Tilly вводитъ понятія о парѣ силъ и разсматриваетъ сложеніе силъ лежащихъ въ одной плоскости 1) когда направленія силъ пересѣкаются, 2) когда онѣ перпендикулярны къ одной линіи и въ 3) онѣ параллельны [1]. При этомъ обнару-

[1] Рѣшеніемъ тѣхъ же задачъ занимается П. Юшкевичъ въ своей работѣ: о сложеніи силъ въ гиперболическомъ пространствѣ. Вѣстн. Оп. Ф. Эл. М., 1898 г., сем. XXII.

живается, какъ и слѣдовало ожидать, аналогія между сложеніемъ силъ и паръ съ одной стороны и вращеній и поступательныхъ перемѣщеній съ другой.

Объ тѣхъ главахъ мемуара de Tilly, которыя посвящены кинетикѣ твердаго тѣла и механикѣ системы, я буду говорить ниже въ связи съ работами другихъ авторовъ, разсматривавшихъ тѣ же отдѣлы механики.

Недавно появилось нѣсколько замѣтокъ [1] французскаго ученаго J. Andrade'a, по своему характеру примыкающихъ къ работамъ A. Genocchi и de Tilly. Выставляя опредѣленнѣе, чѣмъ это дѣлаютъ A. Genocchi и de Tilly, тѣ предположенія, которыя необходимы для особнованія теоріи векторовъ, J. Andrade сводитъ задачу сложенія векторовъ построеніями подобными построеніямъ названныхъ ученыхъ къ функціональному уравненію D'Alembert'a и показываетъ, разсуждая какъ и A. Genocchi въ выше цитированномъ мѣстѣ своего мемуара, что понятіе объ эквивалентныхъ системахъ векторовъ непосредственно приводитъ насъ къ метрическимъ свойствамъ трехъ геометрій Эвклида, Riemann'a и Лобачевскаго.

A. Genocchi, de Tilly и J. Andrade имѣли одну и ту же цѣль: найти законы сложенія векторовъ (силъ, скоростей) и показать, какимъ образомъ ученіе объ эквивалентныхъ системахъ векторовъ приводитъ насъ къ геометріямъ трехъ типовъ. Эти три ученые разсматривали механику (теорію векторовъ) съ точки зрѣнія метрической геометріи. Но въ 1871 году F. Klein обратилъ всеобщее вниманіе на мемуаръ A. Cayley „A sixth Memoir upon Quantics", напечатанный еще въ 1859 году, гдѣ A. Cayley выводитъ формулы проэктивной геометріи, въ которыхъ, какъ частный случай, содержатся формулы метрической геометріи Эвклидовой плоскости и сферической тригонометріи. Замѣчая, что формулы A. Cayley могутъ быть распространены на пространство трехъ и большаго числа измѣреній и видоизмѣнены такимъ образомъ, что онѣ будутъ обнимать формулы метрической геометріи не только Эвклидова пространства, но и всякаго пространства постоянной кривизны, F. Klein въ цѣломъ рядѣ мемуаровъ, посвященныхъ неевклидовой геометріи, показываетъ, что проэктивная геометрія независитъ отъ теоріи параллельныхъ, и можетъ быть обоснована и развита безъ помощи понятій о разстояніи и объ углѣ. Изслѣдованія A. Cayley

[1] Перечень замѣтокъ J. Andrade'a см. въ прилагаемомъ спискѣ. J. Andrade повидимому не зналъ о работахъ Genocchi и de Tilly.

и F. Klein'a обнаруживаютъ такимъ образомъ весьма важное значеніе проэктивной геометріи. Эта отрасль геометріи можетъ быть развита совершенно самостоятельно независимо отъ геометріи метрической, она является частью геометріи общею для всѣхъ пространствъ постоянной кривизны, наконецъ она даетъ поразительно простое и ясное толкованіе метрическимъ отношеніямъ этихъ пространствъ. Съ точки зрѣнія проэктивной геометріи „метрическія свойства фигуры не представляютъ собой свойства фигуры безъ отношенія къ чему либо другому, но ея свойства въ связи другой фигурой“ [1], поверхностью второго порядка, которую обыкновенно, по примѣру A. Cayley, называютъ абсолютомъ, а движенія неизмѣняемой системы представляютъ собой такія коллинеарныя преобразованія, которыя не измѣняютъ абсолюта [2]. Въ изслѣдованіи этихъ преобразованій съ различныхъ точекъ зрѣнія и заключается задача механики.

Говоря о работахъ F. Klein'a, я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на принципѣ двойственности въ механикѣ твердаго тѣла, принципѣ, котораго касается F. Klein въ своемъ мемуарѣ „Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper“. Я полагаю, что здѣсь болѣе чѣмъ гдѣ либо умѣстно говорить объ этомъ принципѣ, такъ какъ нигдѣ онъ не проявляется полнѣе и совершеннѣе, чѣмъ въ геометріи и механикѣ неевклидовыхъ пространствъ.

Въ механикѣ твердаго тѣла двойственность проявляется въ различныхъ направленіяхъ.

Во-первыхъ въ той аналогіи, которая существуетъ между двумя отдѣлами механики, кинематикой и динамикой твердаго тѣла. Причину ея мы должны видѣть въ формальномъ тожествѣ законовъ сложенія силъ и угловыхъ скоростей, и въ возможности не измѣняя дѣйствія силы переносить точку ея приложенія вдоль прямой, по которой дѣйствуетъ сила. Эта аналогія существуетъ въ Эвклидовомъ пространствѣ, какъ показалъ Poinsot, существуетъ также и въ пространствахъ неевклидовыхъ, какъ это видно изъ изслѣдованіи de Tilly, F. Lindemann'a и другихъ.

Въ каждомъ изъ двухъ сейчасъ упомянутыхъ отдѣловъ механики твердаго тѣла въ свою очередь проявляется двойственность. Lagrange [3] первый показалъ, что вращенія, оси которыхъ пересѣкаются между собой, складываются такъ,

---

[1] Cayley, l. c. p. 90. [2] F. Klein, см. ниже. [3] Mécanique Analytique.

какъ складываются поступательныя перемѣщенія. Poinsot[1], введя понятіе о парѣ, обнаружилъ тожество между сложеніемъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, и сложеніемъ моментовъ паръ. Но на этомъ въ Эвклидовомъ пространствѣ и прекращается аналогія между силой и угловой скоростью съ одной стороны и между парой и поступательной скоростью съ другой. Не такъ однако, повидимому, полагали Poinsot и Plücker[2], какъ можно заключить по нѣкоторымъ мѣстамъ въ сочиненіяхъ этихъ ученыхъ. „Однако это весьма замѣчательно“ говоритъ Poinsot, „что одна и таже книга, посвященная наукѣ о силахъ, не переставая быть точной и не переставая трактовать ту же самую науку, могла бы быть понята двумя различными способами, смотря по тому, свяжемъ ли мы со словомъ *сила* идею о причинѣ поступательнаго движенія или идею совершенно отличную—о причинѣ вращенія“ [3]. Но въ словахъ Poinsot и въ мысляхъ, которыя высказываетъ Plücker, заключается нѣкоторая неточность, на что впервые обратилъ вниманіе F. Klein[4] въ цитированномъ выше мемуарѣ. Въ самомъ дѣлѣ, сила дѣйствуетъ по опредѣленной прямой линіи, вращеніе твердаго тѣла происходитъ вокругъ опредѣленной оси. „Но соединить представленіе о силѣ съ опредѣленною осью, т. е. вообразить себѣ силу, которая свободное твердое тѣло стремилась бы повернуть вокругъ опредѣленной прямой линіи также невозможно, какъ невозможно соединить съ опредѣленнымъ лучомъ представленіе о (поступательномъ) безконечно маломъ движеніи, которое должно было бы перемѣщать тѣло по одной вполнѣ опредѣленной прямой линіи. Вращающая сила, т. е. пара силъ, не имѣетъ одной оси, но безконечное множество, у которыхъ задано только направленіе; равнымъ образомъ при поступательномъ движеніи скользитъ не одинъ единственный лучъ вдоль самого себя, но одновременно и всѣ параллельные лучи. Нельзя слѣдовательно геометрическаго представленія объ оси соединить съ механическимъ—вращающей силы и геометрическое представленіе луча съ механическимъ—о поступательномъ движеніи. Рѣчь можетъ идти только о силахъ, которыя дѣйствуютъ *по* прямымъ линіямъ и объ движеніяхъ, которыя происходятъ *вокругъ* прямыхъ“. Причина этого заключается въ недуалистическомъ характерѣ нашего мѣро-

---

[1] Éléments de Statique. [2] Fundamental Views regarding Mechanics. Neue Geometrie des Raumes, § 25. [3] Theorie nouvelle de la rotation des corps, § 20. [4] Надо замѣтить, что F. Klein говоритъ только о Plücker'ѣ и не упоминаетъ Poinsot.

опредѣленія. „Это мѣроопредѣленіе связано, какъ извѣстно, съ кривой второго порядка, съ безконечно удаленнымъ мнимымъ кругомъ. Но можно по примѣру A. Cayley создать общее мѣроопредѣленіе, при которомъ поверхность второго порядка общаго вида играетъ такую же роль, какую раньше играла плоская кривая. Если введемъ такое мѣроопредѣленіе и замѣнимъ одновременно ∞^6 движеній нашего пространства такимъ же числомъ коллинеарныхъ преобразованій, которыя основную поверхность оставляютъ неизмѣнной;—то мы можемъ одновременно говорить о силахъ, которыя дѣйствуютъ по прямымъ (я назову ихъ поступательными) и которыя дѣйствуютъ вокругъ прямой (вращательныя), и объ движеніяхъ, которыя происходятъ вокругъ прямой и по прямой. Но оба рода силъ и оба рода движеній тожественны. Вращеніе вокругъ прямой это тоже самое, что поступательное движеніе вдоль прямой полярной съ ней по отношенію къ основной поверхности второго порядка. Равнымъ образомъ сила, которая дѣйствуетъ по прямой это то же, что сила, которая стремится вращать вокругъ ея поляры". Эти слова F. Klein'a [1] заставляютъ насъ ожидать для неевклидовыхъ пространствъ аналогіи болѣе полной чѣмъ въ пространствѣ эвклидовомъ между силой дѣйствующей по прямой и угловой скоростью съ одной стороны и силой вращающей и поступательной скоростью съ другой. Такая аналогія дѣйствительно существуетъ, какъ показываютъ изслѣдованія de Tilly, F. Lindemann'a и другихъ (ср. слѣдствіе изъ теоремы III § 69).

Въ Геометріи, какъ извѣстно, принципъ двойственности проявляется въ соотвѣтствіи между свойствами фигуръ, которыя можно построить, принимая одинъ разъ за элементъ точку, а въ другой разъ плоскость. Это соотвѣтствіе, въ случаѣ Эвклидова пространства распространяясь только на проективныя свойства фигуръ, проявляется и по отношенію къ метрическимъ, если мы за абсолютъ примемъ поверхность второго порядка, не вырождающуюся ни въ коническое сѣченіе ни въ конусъ, или если Эвклидово пространство сопоставимъ съ пространствомъ, для котораго абсолютомъ служитъ конусъ второго порядка. Это обстоятельство даетъ возможность осуществить мысль нѣкогда высказанную Chasles'емъ [2], а именно на ряду съ механикой точки построить механику, принимающую своимъ элементомъ плоскость. Мы можемъ говорить о скорости и ускореніи плоскости, о вращающей силѣ въ ней приложенной (и о поступательной силѣ прило-

[1] l. c., p. 411—412. [2] Aperçu Historique, Note XXXIV.

женной къ ея полюсу относительно абсолюта). Мы можемъ ввести понятіе о массѣ плоскости, называя такимъ образомъ отношеніе вращающей силы, приложенной къ плоскости, къ приращенію угловой скорости и т. д. Этой идеей широко пользуется F. Lindemann въ своемъ мемуарѣ, о которомъ у насъ сейчасъ будетъ идти рѣчь. Нужно однако замѣтить, что F. Lindemann, разсматривая неизмѣняемую систему, какъ систему плоскостей, имѣлъ въ виду только кинематику и динамику и не касался кинетики.

Наконецъ принципъ двойственности проявляется въ механикѣ въ области тѣхъ идей, которыя были развиты Plücker'омъ [1] и R. S. Ball'емъ [2]: въ теоріи линейнаго комплекса и въ теоріи винтовъ. Прежде чѣмъ говорить объ этой новой формѣ двойственности, я долженъ сказать о координатахъ винта, для чего обращусь къ изложенію мемуара F. Lindemann'a „Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung".

F. Lindemann, становясь на точку зрѣнія A. Cayley и F. Klein'a, изслѣдуетъ безконечно малыя движенія неизмѣняемой системы. Показавъ, что кинематика твердаго тѣла въ неевклидовыхъ пространствахъ также тѣсно связана съ линейнымъ комплексомъ, какъ и въ Эвклидовомъ, F. Lindemann весьма подробно останавливается на изслѣдованіи этой зависимости. Одному и тому же движенію соотвѣтствуетъ два линейныхъ комплекса: одинъ—его F. Lindemann называетъ вращательнымъ—подчиняетъ каждой точкѣ плоскость перпендикулярную [§ 23] къ перемѣщенію точки, другой, поступательный, подчиняетъ каждой плоскости точку въ ней лежащую и перпендикулярную [§ 23] къ оси, вокругъ которой вращается плоскость. Для каждаго луча въ одномъ комплексѣ можно найти въ другомъ лучъ съ нимъ полярный по отношенію къ абсолюту: комплексы взаимно полярны. Всякое безконечно малое движеніе можно замѣнить двумя безконечно малыми вращеніями вокругъ двухъ прямыхъ сопряженныхъ по отношенію къ вращательному комплексу и двумя поступательными движеніями по двумъ прямымъ сопряженнымъ относительно поступательнаго. Координаты поступательнаго и вра-

---

[1] Neue Geometrie des Raumes. [2] Многочисленные мемуары R. S. Ball'я систематически изложены въ книгахъ: R. S. Ball, Theory of screws; H. Gravelius, Theoritische Mechanik starrer Systeme. Краткое резюме каждаго мемуара R. S. Ball можно найти въ послѣднемъ мемуарѣ R. S. Ball'я. The twelfth and concluding memoir on the theory of screws with summary.

щательнаго комплекса F. Lindemann называетъ координатами движенія.

Всякій линейный комплексъ имѣетъ вообще говоря только четыре луча, лежащихъ на абсолютѣ; два изъ нихъ принадлежатъ къ одной системѣ образующихъ абсолюта, два другихъ—къ другой. Двѣ взаимныя поляры, пересѣкающія эти четыре луча F. Lindemann называетъ осями комлекса. Вращательный и поступательный комплексы, соотвѣтствующіе одному и тому же движенію, имѣютъ общія оси: неизмѣняемая система въ одно и тоже время скользитъ вдоль этихъ осей и вращается вокругъ нихъ; онѣ служатъ осями винтового движенія, представляющаго собой самый общій случай движенія неизмѣняемой системы. Такимъ образомъ въ неевклидовой механикѣ всякій винтъ можетъ быть заданъ линейнымъ комплексомъ и подобно послѣднему имѣетъ двѣ взаимно полярныя оси. Координаты комплекса служатъ координатами винта.

Въ связи съ движеніемъ неизмѣняемой системы находится еще одинъ комплексъ второго порядка, комплексъ Reye'я, представляющій собой совокупность всѣхъ прямыхъ, по которымъ перемѣщаются всѣ точки системы и вокругъ которыхъ вращаются всѣ плоскости системы.

Чтобы сложить два безконечно малыхъ движенія надо сложить ихъ соотвѣтствующія координаты. Въ частномъ случаѣ, когда оси двухъ вращеній или директрисы двухъ поступательныхъ движеній пересѣкаются, скорости складываются также, какъ и въ Эвклидовомъ пространствѣ.

Переходя къ динаминѣ F. Lindemann заранѣе предрѣшаетъ аналогію между поступательными и вращательными силами съ одной стороны и вращательнымъ и поступательнымъ перемѣщеніемъ съ другой, опредѣляя законъ сложенія силъ такимъ образомъ: вращательныя и поступательныя силы складываются такъ, какъ поступательныя и вращательныя перемѣщенія. Отсюда уже само собой слѣдуетъ, что системы силъ находятся къ линейнымъ комплексамъ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ и безконечно малыя перемѣщенія. Мы можемъ такимъ образомъ говорить о поступательномъ и вращательномъ силовыхъ комплексахъ и силовомъ винтѣ.

Подробно останавливается F. Lindemann на выводѣ главнѣйшихъ метрическихъ формулъ линейчатой геометріи и на теоріи моментовъ. Двѣ величины характеризуютъ собой относительное положеніе двухъ прямыхъ линій: одну изъ нихъ F. Lindemann называетъ косинусомъ угла между двумя прямыми, а другую моментомъ прямыхъ; послѣдняя представляетъ собой косинусъ угла между одной изъ данныхъ пря-

мыхъ и полярой по отношенію къ абсолюту другой прямой. Нужно однако замѣтить, что истинное значеніе этихъ двухъ величинъ осталось F. Lindemann'y неизвѣстнымъ. Оно было раскрыто впослѣдствіи Heath'омъ [1] и H. Cox'омъ [2]: велпчина, которую F. Lindemann называетъ косинусомъ угла между прямыми, а A. Cayley назвалъ впослѣдствіи комоментомъ прямыхъ (я буду пользоваться терминомъ A. Cayley) есть произведеніе косинусовъ угла и разстоянія между прямыми, моментъ же двухъ прямыхъ есть произведеніе синусовъ тѣхъ же величинъ.

Можно различать два момента силы относительно прямой: комоментъ [3] (его F. Lindemann называетъ Verschiebungsmoment) равный произведенію силы на комоментъ между данной прямой и линіей, по которой сила дѣйствуетъ, и собственно моментъ (его F. Lindemann называетъ Rotationsmoment) равный произведенію силы на моментъ между тѣми же прямыми. Эти основныя понятія приводятъ F. Lindemann'a къ общему понятію о комоментѣ и моментѣ системы силъ относительно даннаго линейнаго комплекса. Замѣчу здѣсь, что выводомъ основныхъ метрическихъ формулъ линейчатой геометріи и теоріей моментовъ занимались впослѣдствіи R. S. Ball [4], H. Cox [5], R. Heath [6], A. Buchheim [7], A. Cayley [8]. Послѣдніе четыре упрощали задачу, выбирая координатный тетраэдръ такимъ образомъ, что уравненіе абсолюта содержитъ только квадраты координатъ; первый пользовался винтовыми координатами и понятіемъ о „векторѣ“ Clifford'a, о которомъ у насъ рѣчь будетъ впереди.

Теорія моментовъ имѣетъ для неевклидовыхъ пространствъ такое же важное значеніе, какъ и для Эвклидова пространства потому, что работа, которую производитъ данная система силъ при данномъ безконечно маломъ перемѣщеніи пропорціональна комоменту системы силъ относительно поступательнаго комплекса связаннаго съ перемѣщеніемъ. Условіе, что работа системы силъ, заданной комплексомъ

---

[1] Quarterly Journal, vol. XVIII. [2] Phil. Trans., 1885, Vol. 175. [3] Если только я правильно понимаю стр. 123 мемуара F. Lindemann'a, то я не могу согласиться съ опредѣленіемъ, которое онъ даетъ Verschiebungsmoment'y. Не смотря на неправильное опредѣленіе F. Lindemann приходитъ однако къ вернымъ формуламъ для Verschiebungsmoment'a благодаря невѣрной формулѣ (2) стр. 124. [4] Trans. of Jrish Academy, vol. XXVIII. [5] Quarterly Journal, vol. XVIII. [6] Ppil. Tans., 1885, pol. 175. [7]) Proceedings of London Math. Sociely, Vol. XV, 1884, p. 94. [8]) Trans. of Cambridge Phil. Sociely, Vol. XV.

$P(X,Y,Z,L,M,N)$ при безконечно маломъ перемѣщеніи, заданномъ комплексомъ $\Pi(\Xi,H,Z,\Lambda,M,N)$ равняется нулю, выражается равенствомъ (если надлежащимъ образомъ выберемъ оси координатъ)

$$\Xi L + HM + ZN + \Lambda X + MY + NZ = 0 \qquad (2)$$

совершенно такимъ же, какъ и въ Эвклидовомъ пространствѣ. Это равенство служитъ основнымъ въ теоріи винтовъ R. S. Ball'я. Но съ другой стороны оно устанавливаетъ между комплексами P и Π зависимость вполнѣ проэктивнаго характера. Мы можемъ поэтому утверждать, что всѣ теоремы теоріи винтовъ Эвклидова пространства остаются безъ измѣненія и въ пространствахъ неевклидовыхъ, если только онѣ носятъ характеръ теоремъ проэктивной геометріи. Такъ, напримѣръ, F. Lindemann показываетъ, что извѣстныя условія выведенныя Möbius'омъ [1] для того, чтобы 4, 5, 6 силъ приложенныхъ къ твердому тѣлу уравновѣшивались, остаются безъ существеннаго измѣненія и въ пространствахъ неевклидовыхъ. Но метрическія формулы и тѣ теоремы теоріи винтовъ, въ которыхъ намъ приходится принимать во вниманіе отношеніе комплекса къ выбранному абсолюту, будутъ конечно уже иными, чѣмъ въ пространствѣ Эвклидовомъ. Въ примѣръ могу привести уравненіе цилиндроида, которое для неевклидовыхъ пространствъ четвертаго порядка.

Я говорилъ уже раньше объ аналогіи, существующей между кинематикой и динамикой твердаго тѣла. Равенство (2) позволяетъ установить между силами и движеніями новое соотвѣтствіе, которое по своему характеру, какъ это замѣчаетъ F. Klein, ближе подходитъ къ принципу двойственности въ той его формѣ, какъ онъ проявляется въ проэктивной геометріи, гдѣ точка сопоставляется съ плоскостью.

„Если Ξ,H,Z,Λ,M,N будемъ разсматривать какъ перемѣнныя, то равенство (2) говоритъ намъ: существуетъ ∞^4 системъ силъ, которыя при данномъ безконечно маломъ движеніи не производятъ никакой работы. Ихъ координаты удовлетворяютъ линейному однородному уравненію. Это мы можемъ выразить еще такимъ образомъ:

Однородное линейное уравненіе между координатами системы силъ представляетъ безконечно малое движеніе; совершенно въ томъ же смыслѣ, какъ въ аналитической геометріи линейное однородное уравненіе между точечными коорди-

[1] Lehrbuch des Statik, § 98 и слѣдующіе.

натами, которое показываетъ, что разстояніе точки отъ нѣкоторой плоскости равняется нулю, представляетъ эту плоскость.

Если же напротивъ будемъ разсматривать X, Y, Z, L, M, N, какъ перемѣнныя, то наше равенство говоритъ: существуетъ ∞^4 системъ безконечно малыхъ движеній, при которыхъ данная система силъ не производитъ работы. Ихъ координаты удовлетворяютъ линейному однородному уравненію. Иначе это можно выразить такимъ образомъ:

Однородное линейное уравненіе между координатами безконечно малаго движенія представляетъ систему силъ совершенно также, какъ, если мы останемся при только что взятомъ примѣрѣ изъ аналитической геометріи, линейнымъ уравненіемъ между плоскостными координатами представляется точка“ [1].

F. Lindemann въ своемъ мемуарѣ дастъ классификацію движеній неизмѣняемой системы основанную на числѣ прямолинейныхъ образующихъ абсолюта, которыя не измѣняютъ своего положенія при движеніи и совпадаетъ въ сущности съ приведенной ниже въ IV главѣ. Одно изъ движеній, неизмѣняющее положенія всѣхъ прямолинейныхъ образующихъ одной системы и двухъ образующихъ другой, отличается отъ всѣхъ другихъ необыкновенной простотой. W. K. Clifford, мемуаръ котораго „Preliminary Sketch of Biquaternions“ появился одновременно съ мемуаромъ F. Lindemann'a, обратилъ на это движеніе особенное вниманіе, какъ на движеніе самое элементарное, вполнѣ аналогичное по своимъ свойствамъ съ движеніемъ поступательнымъ въ Эвклидовомъ пространствѣ и могущее служить основаніемъ при изслѣдованіи всѣхъ другихъ болѣе сложныхъ движеній. Это движеніе находится въ тѣсной связи съ той системой прямыхъ линій, которыя W. K. Clifford назвалъ параллельными.

Вопросъ о томъ, какія линіи мы можемъ назвать параллельными въ неевклидовыхъ пространствахъ, по существу, какъ и всякій вопросъ объ обобщеніи того или другого понятія, есть вопросъ неопредѣленный. Н. И. Лобачевскій назвалъ параллельными двѣ линіи пересѣкающіяся въ безконечно удаленной точкѣ, т. е., если мы станемъ на точку зрѣнія A. Cayley и F. Klein'a, двѣ линіи по Лобачевскому параллельны, когда онѣ пересѣкаются на абсолютѣ. Прин-

[1] F. Klein. Notiz, betreffend den Zusammenhang der Linien geometrie mit der Mechanik starrer Körper. M. A. Band. IV, p. 413—414.

цинъ двойственности тотчасъ же внушаетъ намъ мысль, что роль аналогичную съ этими параллельными должны играть линіи, которыя лежатъ въ одной плоскости касательной къ абсолюту и имѣютъ то общее съ параллельными Лобачевскаго, что онѣ пересѣкаютъ одну и ту же пару прямолинейныхъ образующихъ абсолюта, принадлежащихъ къ различнымъ системамъ. Отсюда вытекаетъ опредѣленіе, которое даетъ параллельнымъ A. Cayley[1] и которое приводитъ въ свою очередь къ новому, третьему, типу параллельныхъ. Всѣ эти три вида параллельныхъ я называю параллельными Н. И. Лобачевскаго [§ 55].

W. K. Clifford первый обратилъ вниманіе, что понятіе о параллельныхъ можетъ быть обобщено въ другомъ направленіи. Онъ называетъ параллельными линіи, которыя пересѣкаютъ двѣ прямолинейныя образующія абсолюта одной и той же системы, причемъ, смотря по тому къ какой системѣ принадлежатъ образующія, онъ различаетъ право—и лѣво—параллельныя [§ 55]. Параллельныя W. K. Clifford'a обладаютъ многими замѣчательными свойствами, вполнѣ аналогичными со свойствами параллельныхъ въ Эвклидовомъ пространствѣ: двѣ линіи параллельныя третьей параллельны между собой; всѣ точки одной изъ двухъ параллельныхъ находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ другой; если линія встрѣчаетъ двѣ параллельныя, то она образуетъ съ ними равные углы; если черезъ всѣ точки какой нибудь прямой линіи проведемъ рядъ параллельныхъ линій, то онѣ образуютъ поверхность нулевой кривизны, названную впослѣдствіи F. Klein'омъ[2] поверхностью W. K. Clifford'a. Но одно изъ наиболѣе замѣчательныхъ свойствъ параллельныхъ W. K. Clifford'a находится въ связи съ тѣмъ движеніемъ, о которомъ шла рѣчь выше, а именно если неизмѣняемая система получаетъ одновременно равныя вращенія вокругъ двухъ взаимныхъ поляръ,то всѣ ея точки движутся по параллельнымъ линіямъ, проходя равныя разстоянія, и тѣло въ одно и то же время и скользитъ вдоль каждой изъ параллельныхъ и вращается вокругъ каждой изъ нихъ. Каждая изъ параллельныхъ можетъ быть разсматриваема какъ ось винтового движенія, причемъ каждой оси отвѣчаетъ одинъ и тотъ же параметръ, зависящій исключительно отъ кривизны пространства и обращающійся въ безконечность въ пространствѣ Эвклида. Это движеніе

[1] Non-Euclidian Geometry. [2] M. A., Band. XXXVII. Слѣдуетъ замѣтить, что на эту поверхность обратилъ вниманіе уже F. Lindemann, хотя отъ послѣдняго укрылись многія замѣчательныя ея свойства.

вполнѣ аналогичное съ поступательнымъ движеніемъ въ Эвклидовомъ пространствѣ, въ каковое оно и обращается, когда неевклидово пространство выраждается въ Эвклидово. W. K. Clifford называетъ „векторомъ“ [1]—правымъ, если точки тѣла движутся по системѣ право-параллельныхъ и лѣвымъ—въ противномъ случаѣ. Всякое движеніе однимъ единственнымъ способомъ можно разложить на правый и лѣвый „векторъ“.

Кромѣ новой теоріи параллельныхъ линій и связанныхъ съ нею движеній Clifford въ томъ же мемуарѣ даетъ новый методъ для изученія теоріи винтовъ, показывая связь этой теоріи къ комплексными числами, названными имъ бикватерніонами. О теоріи бикватерніоновъ у насъ рѣчь будетъ еще впереди.

Чрезвычайно богатый новыми идеями, но весьма сжато изложенный, почти совершенно лишенный доказательствъ мемуаръ W. K. Clifford'a „Preliminary Sketch“ породилъ довольно обширную литературу. H. Cox [2], A. Buchheim [3], R. S. Ball [4], F. Klein [5] комментируютъ и развиваютъ идеи W. K. Clifford'a [6] въ различныхъ направленіяхъ. Первые два изъ названныхъ математиковъ обратили свое вниманіе главнымъ образомъ на теорію бикватерніоновъ, R. S. Ball—на движеніе W. K. Clifford'a, F. Klein—на теорію параллельныхъ и на замѣчательныя свойства поверхности W. K. Clifford'a.

R. S. Ball въ первомъ изъ своихъ мемуаровъ изслѣдуетъ подробнѣе зависимость между направленіями нѣсколькихъ одноименныхъ векторовъ и положеніями прямолинейныхъ образующихъ абсолюта, которыя при этихъ векторахъ остаются неподвижными, доказываетъ весьма важную теорему: относительный моментъ двухъ одноименныхъ векторовъ равняется нулю только тогда, когда они взаимно перпендикулярны, между тѣмъ какъ возможный моментъ двухъ разно-

---

[1] Векторомъ W. K. Clifford, называетъ вообще величину связанную съ системой параллельныхъ линій, ротороомъ—величину связанную съ одной прямой линіей и моторомъ—величину связанную съ винтомъ. [2] On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of Uniform Space. [3] On the Theory of Srews in Elliptic Space. A memoir on Biquaternions. См. прилагаемый списокъ. [4] Certain Problems in the Dynamics of a Rigid Systeme moving in Elliptic Space. On the Theory of Content. [5] M. A., B. XXXVII. [6] Самъ W. K. Clifford не разъ возвращался къ вопросамъ затронутымъ въ «Preliminary Sketch of Biquaternions». См. прилагаемый списокъ.

именныхъ векторовъ равняется нулю всегда и, пользуясь этой теоремой, выводитъ выраженіе для относительнаго момента двухъ винтовъ.

Во второмъ мемуарѣ R. S. Ball занимается изслѣдованіемъ конечныхъ движенія W. K. Clifford'a. Здѣсь, предполагая, что уравненіе абсолюта содержитъ только квадраты координатъ онъ выводитъ формулы линейнаго преобразованія, соотвѣтствующаго вектору W. K. Clifford'a, формулы, которыя впослѣдствіи F. Klein получилъ другимъ путемъ и представилъ въ весьма простой и изящной формѣ помощью кватерніоновъ. Изъ этихъ формулъ R. S. Ball выводитъ самыя общія формулы линейнаго ортогональнаго преобразованія, данныя еще ранѣе A. Cayley[1], и показываетъ, что порядокъ, въ которомъ мы складываемъ „векторы" W. K. Clifford'a не вліяетъ на результатъ, когда векторы разноименны и вліяетъ, когда они одноименны.

Я говорилъ до сихъ поръ только о кинематикѣ и динамикѣ твердаго тѣла; перейду теперь къ кинетикѣ, причемъ остановлюсь сначала на общихъ принципахъ и теоремахъ механики.

De Tilly[2] первый пересмотрѣлъ основные принципы механики съ цѣлью опредѣлить на сколько они зависятъ отъ постулата Эвклида. Вскорѣ затѣмъ E. Schering[3] указалъ тотъ видъ, который принимаютъ въ пространствѣ Лобачевскаго интегралы уравненій движенія системы матерьяльныхъ точекъ, соотвѣтствующіе интеграламъ движенія центра тяжести и площадей въ Эвклидовомъ пространствѣ, и разсматривалъ какъ долженъ быть видоизмѣненъ для неевклидовыхъ пространствъ законъ тяготѣнія и связанная съ нимъ теорія потенціала. Сравнительно недавно основные принципы и законы механики не только для пространства Лобачевскаго, но и для какого угодно пространства постоянной кривизны были подвергнуты вновь подробному пересмотру W. Killing'омъ[4]. Упомяну, наконецъ, что мною[5] было указано на одно свойство винтовыхъ интеграловъ для пространствъ постоянной кривизны.

Можно считать достаточно очевиднымъ, что понятія о скорости, ускореніи, массѣ, плотности, количествѣ движенія,

---

[1] Recherches ultérieurs sur les déterminants gauches. [2] Etudes de Mécaniqne abstraite. [3] Die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Die Kraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raumen [4] Die Mechanik in den Nicht-Euclidischen Raumformen. [5] Винты и комплексныя числа.

живой силѣ, силѣ не зависятъ ~~отъ~~ не только отъ XI постулата Эвклида, но и отъ того будемъ ли мы прямую линію считать конечной или безконечной. Также очевидно, что Ньютоновы законы движенія, которыя связываютъ силу съ проведеннымъ ею движеніемъ, одинаково приложимы ко всякому пространству постоянной кривизны. Принимая наконецъ во вниманіе, что геометрія безконечно-малой области такого пространства совпадаетъ съ геометріей Эвклида, ясно, что законы сложенія движеніи точки, а слѣдовательно, на основаніи законовъ Ньютона, и законы сложенія силъ въ кинетикѣ неевклидовыхъ пространствъ тожественны съ таковыми же законами въ пространствѣ Эвклида.

Не подлежитъ также никакому сомнѣнію, что принципъ D'Alembert'a, который служитъ для опредѣленія движенія несвободной системы матерьяныхъ точекъ, примѣнимъ ко всякому пространству.

Что касается до принципа возможныхъ перемѣщеній, то, какъ замѣчаетъ de Tilly, „достаточно изучить прекрасное доказательство этого принципа при помощи блоковъ, данное Lagrange'емъ въ его „Mecanique Analytique", доказательство воспроизведенное и комментированное потомъ многими авторами, чтобы убѣдиться, что оно вполнѣ независитъ отъ XI постулата Евклида" и, добавлю я, отъ аксіомы о безконечности прямой.

Сопоставляя принципъ D'Alembert'a съ принципомъ возможныхъ перемѣщеній, мы можемъ совершенно также, какъ и въ Эвклидовомъ пространствѣ, для всякаго пространства доказать законъ живыхъ силъ, который обращается въ законъ сохраненія энергіи, когда силы имѣютъ потенціалъ. Законъ сохраненія энергіи, такимъ образомъ не зависитъ отъ теоріи параллельныхъ и можетъ быть и не быть закономъ природы, какова бы ни была кривизна пространства.

Нѣсколько иначе обстоитъ дѣло съ законами количествъ движенія извѣстными болѣе подъ названіемъ законовъ движенія центра тяжести и площадей, ибо въ неевклидовыхъ пространствахъ уже нельзя дать этимъ законамъ того геометрическаго толкованія, которое имъ дается обыкновенно въ пространствѣ Эвклидовомъ, и отъ котораго происходитъ и самое ихъ названіе. Но въ моей работѣ „Винтовое счисленіе" я показалъ, что законы количествъ движенія могутъ быть соединены въ одинъ болѣе общій законъ, а этотъ послѣдній можетъ быть представленъ въ такой формѣ, что онъ остается безъ измѣненій и въ неевклидовыхъ пространствахъ. Вотъ этотъ законъ.

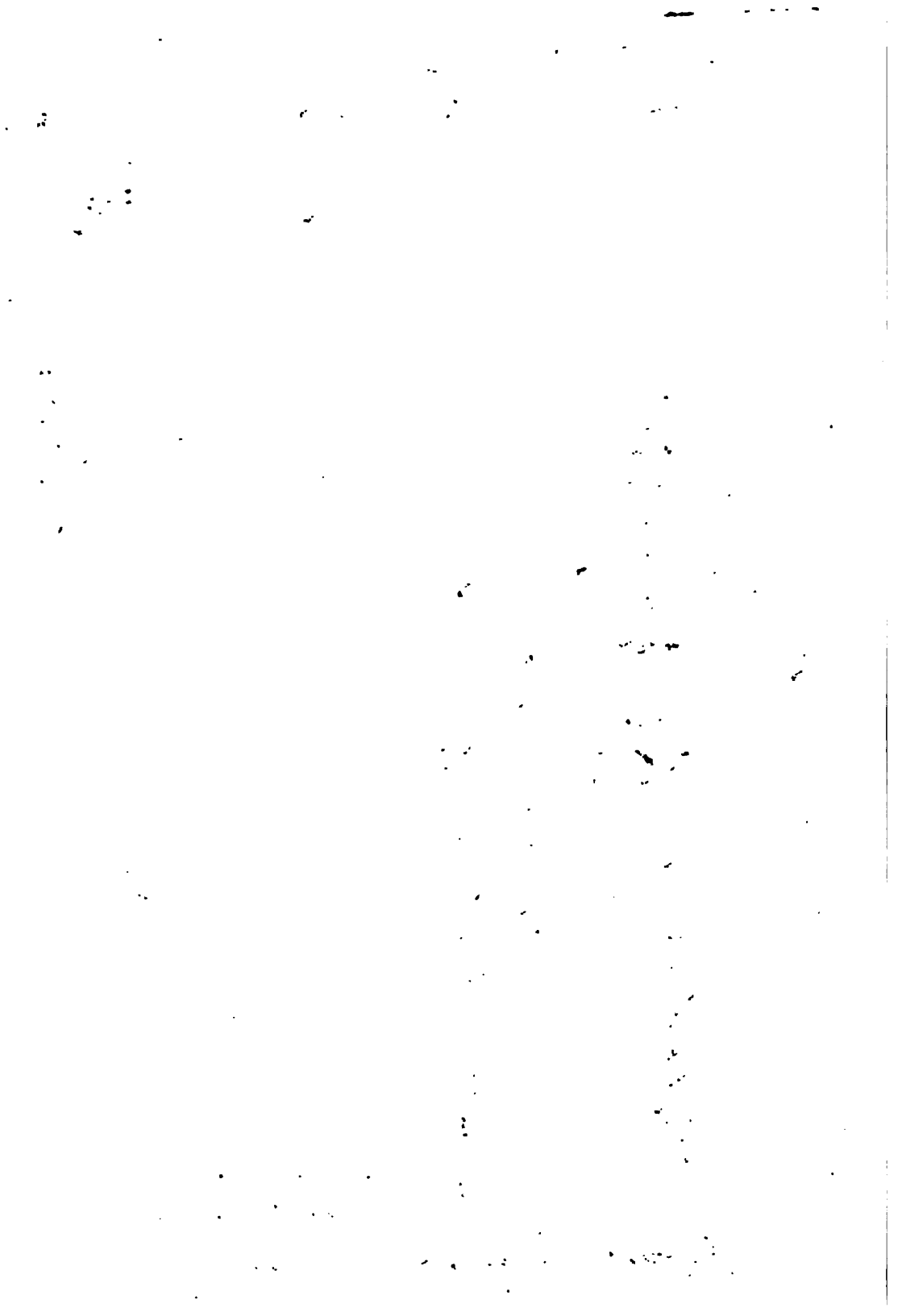
Если для системы матерьяльныхъ точекъ возможенъ кинематическій винтъ, то производная по времени отъ момента винта количествъ движенія относительно возможнаго равняется моменту силового винта относительно того же возможнаго [1].

Въ частномъ случаѣ, когда моментъ силового винта относительно возможнаго равняется нулю, этотъ законъ даетъ намъ винтовой интегралъ, геометрическій смыслъ котораго, какова бы ни была кривизна пространства, можетъ быть выраженъ слѣдующимъ образомъ: моментъ винта количествъ движенія относительно возможнаго винта остается во все время движенія постояннымъ. Интегралы E. Scheringʼa и W. Killingʼa представляютъ частные случаи винтового, когда возможный винтъ опредѣляетъ или поступательное, или вращательное движеніе.

Хотя винтовые интегралы, послѣ того какъ мы ихъ представили въ выше указанной формѣ, подобно интегралу живыхъ силъ, сохраняютъ свое геометрическое значеніе, какова бы ни была кривизна пространства, однако между этими интегралами есть существенное различіе. Оно обусловливается слѣдующей теоремой: если силы обладаютъ потенціаломъ и связи системы могутъ быть представлены конечными уравненіями между координатами точекъ системы, то каждой группѣ винтовыхъ интеграловъ соотвѣтствуетъ группа движеній (въ смыслѣ S. Lie) разсматриваемаго пространства и обратно каждой группѣ движеній соотвѣтствуетъ группа интеграловъ. Винтовые интегралы такимъ образомъ весьма тѣсно связаны съ группой движеній пространства и ея подгруппами. Такъ какъ эти группы для пространствъ положительной, отрицательной и нулевой кривизны существенно различны, то и свойства винтовыхъ интеграловъ будутъ видоизмѣняться въ зависимости отъ кривизны пространства; между тѣмъ интегралъ живыхъ силъ совершенно отъ кривизны пространства не зависитъ и къ группѣ движеній пространства никакого отношенія не имѣетъ.

W. Killing въ своемъ мемуарѣ „Die Mechanik in den Nicht-Euclidischen Raumformen“ выводитъ общія дифференціальныя уравненія движенія свободной и не свободной системы матерьяльныхъ точекъ. Смыслъ этихъ уравненій можетъ быть выраженъ такимъ образомъ [2]: „составимъ для $n+1$ кратно протяженнаго Эвклидова пространства уравненія движенія для точекъ, которыя вначалѣ движенія принадлежали къ n-кратно протяженной шаровой области и принуждены

[1] Винтовые счисленіе § 106. [2] l. c. p. 1.



Впослѣдствіи W. Killing распространилъ на неевклидово пространство нѣкоторыя теоремы теоріи притяженія, принадлежащія Chasles'ю.

Хотя уже de Tilly въ „Etudes de Mécanique Abstraite" вводитъ понятіе о моментѣ инерціи матерьяльной системы относительно оси и рѣшаетъ нѣсколько простыхъ задачъ изъ теоріи удара, причемъ онъ считаетъ массу тѣла распредѣленною въ одной плоскости, но болѣе полное и систематическое развитіе кинетика твердаго тѣла получила благодаря работамъ Clifford'a [1], R. S. Heath'a [2] и W. Killing'a [3].

Выраженіе живой силы, полученное W. K. Clifford'омъ въ видѣ квадратичной однородной формы отъ координатъ кинематическаго винта, приводитъ къ необходимости изучать нѣкоторыя суммы, распространенныя на всѣ матерьяльныя частицы тѣла—моменты инерціи, которыя отличаются отъ моментовъ, разсматриваемыхъ въ Эвклидовомъ пространствѣ, только тѣмъ, что всюду вмѣсто разстояній входятъ синусы разстояній. Плоскости, относительно которыхъ моменты инерціи тѣла равны, огибаютъ поверхность второго класса. Всѣ такія поверхности для даннаго тѣла образуютъ систему S_1 софокусныхъ поверхностей (R. S. Heath). Точки, относительно которыхъ моменты инерціи равны, лежатъ на поверхностяхъ S_2 второго порядка съ общими центрами (W. Killing). Всѣ поверхности S_1 и S_2 имѣютъ одинъ общій по отношенію и къ нимъ и къ абсолюту автополярный тетраэдръ (назовемъ его тетраэдромъ инерціи): его вершины суть центры инерціи (W. Killing), его грани—главныя плоскости инерціи, его ребра—главныя оси инерціи (W. K. Clifford). W. K. Clifford первый показалъ, что координаты винта количествъ движенія выражаются частными производными живой силы по координатамъ кинематическаго винта и вывелъ дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла, уравненія, которыя принимаютъ наиболѣе простой видъ, если тетраэдръ инерціи принять за координатный тетраэдръ. Другимъ путемъ и въ другой формѣ были получены эти уравненія R. S. Heath'омъ и W. K. Killing'омъ. Что касается до ихъ интеграціи при отсутствіи внѣшнихъ силъ, то наиболѣе общее рѣшеніе было получено R. S. Heath'омъ по указаніямъ сдѣланнымъ W. K. Clifford'омъ. Слѣдуетъ однако замѣтить, что рѣшеніе R. S. Heath'a нельзя считать самымъ общимъ, такъ какъ оно содержитъ въ выраженіяхъ коорди-

[1] Motion of a Solid in Elliptic Space. On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid. [2] On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space. [3] Die Mechanik in den Nicht-Euclidischen Raumformen.

натъ кинематическаго винта въ функціи времени вмѣсто шести произвольныхъ постоянныхъ только четыре. Задача движенія твердаго тѣла по инераціи остается такимъ образомъ и до сихъ поръ открытой.

Я перехожу теперь къ краткому изложенію содержанія своей работы и постараюсь указать на ея основныя идеи и наиболѣе существенныя пункты, въ которыхъ она отличается отъ работъ другихъ авторовъ, писавшихъ по механикѣ неевклидовыхъ пространствъ.

Во-первыхъ, вмѣсто того, чтобы разсматривать отдѣльно кинематику и динамику твердаго тѣла, какъ это дѣлали указанные выше авторы, я счелъ болѣе удобнымъ соединить эти двѣ отрасли механики въ одну болѣе отвлеченную теорію—теорію векторовъ.

Во-вторыхъ, всѣ указанные мною авторы задавали силу и скорость совокупностью прямой и числа, и только de Tilly и П. Юшкевичъ изобрази силы и скорости имъ пропорціональными отрѣзками прямой. Такое геометрическое представленіе у названныхъ авторовъ однако не играетъ никакой существенной роли и даже простѣйшимъ закономъ сложенія силъ и скоростей эти авторы подобно всѣмъ другимъ пользовались въ его аналитической формѣ. Никто, на сколько мнѣ извѣстно, не задавался вопросомъ, не слѣдуетъ ли, избражая силы и скорости прямолинейнымъ отрѣзкомъ, принять какую нибудь другую зависимость между длиной этихъ отрѣзковъ и величиной изображаемыхъ ими силъ и скоростей вмѣсто прямой пропорціональности, никто не задавался вопросомъ, нельзя ли основной законъ механики—законъ сложенія силъ и скоростей выразить въ столь же простой геометрической формѣ, какъ и правило параллелограмма въ Эвклидовомъ пространствѣ и такимъ образомъ придать механикѣ твердаго тѣла въ неевклидовыхъ пространствахъ болѣе геометрическій характеръ. Эти вопросы слѣдуетъ считать исходными вопросами моей работы. Они повели меня въ свою очередь къ болѣе глубокому анализу тѣхъ предположеній, которыя необходимы съ точки зрѣнія проэктивной геометріи для формальнаго обоснованія теоріи векторовъ. Я приведу здѣсь эти предположенія и опредѣленія, причемъ опущу необходимыя доказательства.

Опредѣленія.—I. Пространство есть трояко-протяженное непрерывное числовое многообразіе; каждой точкѣ соотвѣтствуетъ одна и только одна система трехъ отношеній $x_1:x_2:x_3:x_4$ четырехъ однородныхъ координатъ точки, и обратно каждой

системѣ трехъ отношеній $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ соотвѣтствуетъ одна и только одна точка.

Геометрическое мѣсто точекъ, опредѣляемыхъ линейныхъ уравненіемъ

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_2 + X_4x_4 = 0$$

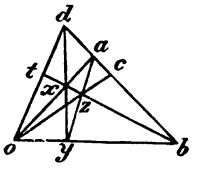
есть плоскость съ координатами X_1, X_2, X_3, X_4; пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.

Векторъ xy есть совокупность двухъ точекъ x и y: одну изъ нихъ, напримѣръ x, мы называемъ начальной, другую— конечной точками вектора; линія соединяющая точки вектора есть лучъ вектора [§ 24].

II. Подчинимъ каждой точкѣ o (o_1, o_2, o_3, o_4) пространства плоскость O (O_1, O_2, O_3, O_4) помощью четырехъ функцій

$$O_i = \varphi_i(o_1, o_2, o_3, o_4), \qquad i = 1,2,3,4$$

которыя могутъ быть совершенно произвольны, и назовемъ плоскость O *основною* плоскостью для точки o. Назовемъ сложеніемъ векторовъ съ общимъ началомъ операцію коммутативную, ассоціативную и не зависящую отъ коллинеарныхъ преобразованій, которыя не измѣняютъ положенія общаго начала векторовъ и основной плоскости этого начала. Точнѣе послѣднее условіе означаетъ слѣдующее: если $ox + oy = oz$ и коллинеарное преобразованіе, не измѣняющее положенія точки o и плоскости O, переводитъ точки x, y, z въ x', y', z', то $oz' = ox' + oy'$.



Я утверждаю, что этими условіями операція сложенія векторовъ опредѣляется вполнѣ: чтобы сложить векторы ox и oy [§ 25] продолжимъ линіи ox и oy до пересѣченія соотвѣтственно въ точкахъ a и b съ плоскостью O и соединяемъ b съ x и a съ y; точка z пересѣченія ay и bx и будетъ концомъ вектора $oz = ox + oy$ (см. чертежъ).

III. Введемъ какія нибудь условія, позволяющія намъ на каждой прямой отмѣчать двѣ точки, которыя назовемъ безконечно-удаленными точками прямой. Эти точки могутъ лежать на нѣкоторой поверхности, но могутъ быть разсѣяны въ пространствѣ, поверхности не образуя. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ безконечно-удаленныя точки луча вектора xy: если векторъ $x'y'$ лежитъ на лучѣ xy и если ряды $\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{b}x'y'$ проэктивны, то векторъ xy мы считаемъ равнымъ вектору $x'y'$, а замѣну вектора xy векторомъ $x'y'$ называемъ перенесеніемъ вектора вдоль его луча.

IV. Операціи сложенія и разложенія векторовъ и операцію перенесенія вектора вдоль его луча назовемъ элементарными, а двѣ системы векторовъ, которыя могутъ быть преобразованы одна въ другую помощью элементарныхъ операцій,— эквивалентными.

Допущенія.—I. Функціи φ_i дифференцируемы.

II. Совокупность векторовъ xy и yx различающихся только тѣмъ, что начало одного служитъ концомъ другого эквивалентна нулю: $xy+yx=0$.

Я утверждаю, что эти два допущенія налагаютъ на функціи φ_i и на выборъ безконечно-удаленныхъ точекъ весьма важныя стѣсненія: безконечно-удаленными точками прямой служатъ точки, въ которыхъ прямая пересѣкается съ нѣкоторой поверхностью второго порядка:

$$\sum a_{ik}x_ix_k=0, \qquad a_{ik}=a_{ik},$$

а основною плоскостью для точки o мы должны считать плоскость полярную съ o относительно той же поверхности, такъ что функціи φ_i должны имѣть видъ:

$$O_i=\varphi_i(o_1,o_2,o_3,o_4)=a_{i1}o_1+a_{i2}o_2+a_{i3}o_3+a_{i4}o_4.$$

Такимъ образомъ сдѣланныя нами два допущенія приводятъ насъ къ пространствамъ съ постоянной кривизной и преобразуютъ опредѣленія II и III въ опредѣленія, данныя въ §§ 25 и 30. Эти послѣднія даютъ въ свою очередь возможность развить всю теорію векторовъ, опираясь исключительно на проэктивную геометрію.

Простѣйшимъ элементомъ теоріи векторовъ служитъ векторъ—совокупность двухъ точекъ. Но принципъ двойственности внушаетъ мысль, что совокупность двухъ плоскостей мы также должны считать элементомъ теоріи векторовъ столь же простымъ и основнымъ, какъ и векторъ, и вполнѣ равноправнымъ съ этимъ послѣднимъ. Такую совокупность я называю ротором [§ 24]. Понятія о векторѣ и роторѣ приводятъ насъ затѣмъ къ понятію о самомъ общемъ элементѣ теоріи векторовъ—къ понятію о моторѣ, къ понятію о точкѣ и плоскости приведенія мотора [1] [§§ 39 и 40]. Доказавъ весьма важную лемму § 42, я ввожу затѣмъ понятіе о проэкціи мотора на линію [§ 42] [2], о суммѣ моторовъ [§ 44] и заканчиваю

---

[1] Термины роторъ и моторъ я заимствую у W. K. Clifford a (Preliminary Sketch of Biquaternions). [2] Понятіе о проэкціи мотора и винта на линію для Эвклидова пространства было введено мною въ первый разъ въ моей работѣ «Винтовое счисленіе».

главу II доказательствомъ одной основной теоремы теоріи векторовъ — теоремы II § 44.

Вся вторая глава посвящена выясненію основныхъ понятій и теоремъ теоріи векторовъ, которыя носятъ проэктивный характеръ и необходимы для дальнѣйшаго изложенія. Въ третьей главѣ я перехожу къ выводу основныхъ метрическихъ формулъ. Я ввожу сначала понятія о тензорѣ вектора и ротора [§§ 46 и 47] и показываю [§ 60], что законъ сложенія векторовъ и роторовъ аналитически выражается совершенно также, какъ въ Эвклидовомъ пространствѣ законъ сложенія силъ и скоростей, если за мѣру вектора принять не длину его, а тангенсъ длины (тензоръ вектора) и за мѣру ротора не уголъ его (т. е. уголъ между плоскостями ротора), а тангенсъ этого угла (тензоръ ротора). Отсюда слѣдуетъ, что, желая примѣнить теорію векторовъ къ механикѣ, мы можемъ силы и скорости изображать и векторами и роторами, подбирая длину векторовъ и углы роторовъ такимъ образомъ, чтобы тангенсы этихъ величинъ были пропорціональны величинѣ силы или скорости. Если къ этому я добавлю, что въ Эвклидовомъ пространствѣ роторы, оси которыхъ параллельны между собой, не эквивалентны [§§ 34 и 40], тогда какъ векторы съ параллельными лучами и равной длины всѣ между собой эквивалентны, то будетъ ясно, что векторами мы должны изображать величины, которыя въ томъ частномъ случаѣ, когда пространство обращается въ Эвклидово, связаны только съ направленіемъ прямой, т. е. поступательную скорость и вращающую силу, а роторами—величины связанныя не только съ направленіемъ, но и съ положеніемъ прямой, т. е. угловую скорость и поступательную силу.

Основными метрическими понятіями теоріи винтовъ слѣдуетъ считать *комплексный уголъ* между двумя прямыми и *тензоръ мотора*. Прежде чѣмъ о нихъ говорить вернусь къ мемуару W. K. Clifford'a „Preliminary Sketch of Biquaternions“. Я упоминалъ уже выше, что въ этомъ мемуарѣ W. K. Clifford намѣчаетъ новый методъ для изученія теоріи винтовъ, показывая связь ея съ теоріей комплексныхъ чиселъ вида $q_1+\omega q_2$ гдѣ

$$q_1=w_1+ix_1+jy_1+kz_1,\ q_2=w_2+ix_2+jy_2+kz_2$$

суть кватерніоны, а ω символъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что $\omega^3=0$ въ случаѣ Эвклидова пространства и $\omega^2=1$ въ случаѣ пространства эллиптическаго. Впослѣдствіи H. Cox[1]

[1] On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of Uniform Space.

дополнилъ результаты W. K. Clifford'a, показавъ, что теорію бикватерніоновъ можно примѣнить и къ теоріи винтовъ гиперболическаго пространства, если ω^2 считать равнымъ—1. Существенное улучшеніе внесъ въ теорію бикватерніоновъ A. Buchheim[1], обративъ вниманіе на то, что мы можемъ изучать одновременно бикватерніоны всѣхъ трехъ типовъ, указанныхъ W. K. Clifford'омъ и Cox'омъ, если положимъ $\omega^2=\varkappa^2$ и будемъ считать $\varkappa=1$ для эллиптическаго пространства, $\varkappa=0$—для параболическаго и $\varkappa=\sqrt{-1}$ для гиперболическаго. Величина $\varkappa$, говоритъ A. Buchheim „въ дѣйствительности обратна радіусу кривизны пространства: она равняется величинѣ $1/k$, которая встрѣчается въ формулахъ Лобачевскаго". Очевидно, что весьма важное замѣчаніе A. Buchheim'a можетъ быть нѣсколько обобщено: бикватерніоны W. K. Clifford'a и H. Cox'a могутъ быть разсматриваемы какъ частные случаи бикватерніона $q_1+\omega q_2$, гдѣ $\omega^2=\varkappa^2$ и $\varkappa$ какое угодно положительное, отрицательное или обыкновенное мнимое число, которое нужно принять равнымъ радіусу кривизны пространства, если бикватерніоны мы хотимъ интерпретировать геометрически.

Въ 1894 году независимо отъ работъ W. K. Clifford'a, H. Cox'a и A. Buchheim'a я подмѣтилъ связь между теоріей винтовъ Эвклидова пространства и комплексными числами $q_1+\omega q_2(\omega^2=0)$ и я успѣлъ уже вполнѣ развить теорію этихъ чиселъ и приложить ее къ теоріи винтовъ, когда узналъ о работахъ упомянутыхъ ученыхъ. Мой пріемъ для изслѣдованія этихъ чиселъ вполнѣ примѣнимъ къ бикватерніонамъ другихъ типовъ, отвѣчающихъ какому угодно значенію $\varkappa$ и позволяетъ развить теорію бикватерніоновъ въ направленіи нѣсколько отличномъ отъ того, въ которомъ развиваетъ эту теорію A. Buchheim.

Дѣло въ томъ, что всѣ авторы, занимавшіеся теоріей бикватерніоновъ, разсматривали бикватерніонъ $q_1+\omega q_2$ какъ сумму двухъ кватерніоновъ, одинъ изъ которыхъ умноженъ на символъ ω. Но стоитъ только представить бикватерніонъ въ видѣ кватерніона

$$w_1+w_2\omega+(x_1+x_2\omega)i+(y_1+y_2\omega)j+(z_1+z_2\omega)k,$$

у котораго коэффиціентами при комплексныхъ единицахъ $1,i,j,k$ служатъ не дѣйствительныя числа, а числа вида $a+\omega b(\omega^2=\varkappa^2)$, гдѣ a и b могутъ быть дѣйствительными или

[1] A memoir on Biquaternions.

обыкновенными мнимыми, и затѣмъ развить теорію комплексныхъ чиселъ $a+\omega b$ и ихъ функцій, какъ тотчасъ же становится очевиднымъ, что всѣ безъ исключенія формулы теоріи кватерніоновъ могутъ быть преобразованы въ формулы теоріи бикватерніоновъ, если всюду дѣйствительныя числа замѣнимъ числами вида $a+\omega b(\omega^2=\varkappa^2)$. Этотъ результатъ самъ по себѣ не представлялъ бы еще особенно важнаго значенія, если бы всѣ формулы полученныя такимъ образомъ не имѣли весьма простого геометрическаго смысла въ теоріи винтовъ пространства съ кривизной $\varkappa^2$. При этомъ между прочимъ оказалось, что формула для угла между двумя векторами съ общимъ началомъ [форм. 95 § 65] даетъ намъ комплексное число $\varphi+\omega\delta$, гдѣ φ уголъ между двумя не пересѣкающимися прямыми, а δ—кратчайшее разстояніе между ними: мы приходимъ такимъ образомъ къ понятію о комплексномъ углѣ между двумя прямыми [§ 57]. Оно было введено мною впервые въ моей работѣ „Винтовое Счисленіе“ въ 1895 году для Эвклидова пространства ($\omega^2=0$) и въ настоящей работѣ распространяется на пространство какой угодно кривизны $\varkappa^2(\omega^2=\varkappa^2)$ [1].

---

[1] Я долженъ однако здѣсь замѣтить, что H. Cox (On the Application of Quaternions....) и Fr. Schilling (Ueber die Geometrische Beteudung...) изучая нѣкоторыя задачи пространства Лобачевскаго, разсматривали выраженіе $\varphi+i\delta$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, подобное $\varphi+\omega\delta$. Но эти два выраженія различаются одно отъ другого и формально и по существу, ибо первое есть уголъ между двумя пересѣкающимися прямыми, а второе уголъ между двумя прямыми, которыя не встрѣчаются, и представляетъ собой понятіе совершенно новое. Чтобы это различіе сдѣлать болѣе яснымъ обобщу нѣсколько выраженіе $\varphi+i\delta$ и возьму вмѣсто него $\varphi+\varkappa\delta$, въ которое обращается выраженіе H. Cox'a, когда пространство становится гиперболическимъ, и надлежащимъ выборомъ единицы длины сдѣлаемъ $\varkappa=\sqrt{-1}$. Формальное различіе между $\varphi+\varkappa\delta$ и $\varphi+\omega\delta$ заключается въ томъ, что первое есть обыкновенное дѣйствительное или мнимое число, тогда какъ второе есть число комплексное, въ которомъ φ и δ могутъ быть какими угодно дѣйствительными и мнимыми, но никогда не могутъ слиться въ одно обыкновенное мнимое число. Такъ, напримѣръ, если φ дѣйствительно, $\varkappa=i$, $\delta=ai$, гдѣ a дѣйствительно, то $\varphi+i\delta=\varphi-a$ будетъ числомъ дѣйствительнымъ, тогда какъ $\varphi+\omega\delta=\varphi+\omega ia$ остается комплекснымъ. Яснѣе различіе становится въ пространствѣ эллиптическомъ, когда $\varkappa$ и $\varphi+\varkappa\delta$ (при дѣйствительныхъ φ и δ) будутъ числами дѣйствительными, между тѣмъ какъ $\varphi+\omega\delta$ по прежнему остается комплекснымъ. Еще рѣзче выступаетъ различіе въ пространствѣ параболическомъ, когда $\varkappa=0$ и $\varphi+\varkappa\delta$ обращается въ φ—уголъ между двумя прямыми, тогда какъ $\varphi+\omega\delta$ все еще остается числомъ комплекснымъ, которое зависитъ не только отъ угла, но и отъ разстоянія между прямыми.

Въ такомъ же точно отношеніи какъ комплексный уголъ къ углу между прямыми находится тензоръ мотора къ тензору ротора и все, что было сказано о комплексномъ углѣ, примѣнимо также и къ тензору мотора. Эти два основныя понятія для Эвклидова пространства были введены мною въ той части моей работы „Винтовое счисленіе“, которая была напечатана въ Сентябрѣ 1895 года. Спустя годъ, въ Ноябрѣ 1896 года, появились въ Comptes Rendus двѣ предварительныя замѣтки R. de Saussure'a [1], въ которыхъ американскій ученый независимо отъ меня вводитъ въ Эвклидовомъ пространствѣ комплексный уголъ (codistangle). R. de Saussure впослѣдствіи развилъ свои идеи въ двухъ мемуарахъ [2]; его результаты совпадаютъ съ опубликованными мною въ 1895 году.

Пользуясь понятіемъ о комплексномъ углѣ и тензорѣ мотора, я доказываю въ § 62 теорему I, помощью ея развиваю теорію комплексныхъ координатъ [§§ 63—71] и прихожу такимъ образомъ къ слѣдующей весьма общей теоремѣ, которую я считаю однимъ изъ главнѣйшихъ результатовъ моихъ изслѣдованій [§ 93]: *всѣ формулы аналитической геометріи Эвклидова пространства преобразуются въ формулы теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной, если дѣйствительныя числа, входящія въ формулы, замѣнимъ комплексными съ двумя единицами и съ модулемъ операціи умноженія.* Изъ этой теоремы вытекаетъ весьма важное заключеніе: *формулы механики могутъ быть истолкованы какъ формулы теоріи винтовъ, если дѣйствительныя числа въ нихъ входящія замѣнимъ комплексными вышеуказаннаго типа.*

Эти двѣ весьма важныя теоремы были доказаны мною для Эвклидова пространства ($\varkappa^2=0$) въ „Винтовомъ счисленіи“. Тогда же было указано мной какое значеніе для механики твердаго тѣла можетъ имѣть вторая теорема. Я обратилъ между прочимъ вниманіе [3] на то, что она позволяетъ распространить извѣстную формулу Savary на общій случай движенія твердаго тѣла, что и было сдѣлано впослѣдствіи Д. Н. Зейлигеромъ [4] и R. de Saussure'омъ [5].

Что касается до различія въ геометрическомъ смыслѣ, то оно обусловается теоремой II § 80, которая показываетъ намъ, что $\varphi+\varkappa\delta$ уголъ между двумя пересѣкающимися прямыми извѣстнымъ образомъ построенными при помощи данныхъ, тогда какъ $\varphi+\omega\delta$ есть комплексный уголъ между двумя прямыми, которыя не встрѣчаются.

[1] См. прилагаемый списокъ. [2] American Journal of Mathematics, Vol. XVIII, XIX. [3] Винтовое счисленіе, § 91. [4] Основныя формулы комплексной геометріи прямой. [5] American Journal of Mathematics, Vol. XIX.

Изъ сказаннаго выше видно, что комплексныя числа $a+\omega b(\omega^2=\varkappa^2)$ играютъ важную роль въ моей работѣ. Вотъ почему я начинаю съ подробнаго изложенія теоріи этихъ чиселъ и ихъ функцій. Первые параграфы первой главы имѣютъ цѣлью напомнить общую теорію комплексныхъ чиселъ съ двумя единицами и показать какими свойствами интересующія меня числа выдѣляются изъ другихъ классовъ и типовъ комплексныхъ чиселъ. причемъ замѣчу, что условія коммутативности и ассоціативности [§ 5] принадлежатъ A. Cayley [1], хотя этотъ ученый и не представляетъ ихъ при помощи матрицъ.

Общая теорія функцій комплексныхъ чиселъ съ какимъ угодно числомъ единицъ была дана G. Scheffers'омъ въ его мемуарѣ „Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen complexen Functionen". Въ §§ 15—17 я довольно подробно излагаю теорію функцій комплексныхъ чиселъ съ двумя единицами; частный случай этой теоріи для той системы, которую я называю параболической [§ 7] былъ разработанъ мной еще раньше въ „Винтовомъ счисленіи" и R. de Saussure'омъ въ цитированныхъ выше мемуарахъ.

Въ моемъ изложеніи я представляю комплексныя числа точками плоскости, причемъ положенія точекъ я опредѣляю не прямоугольными Декартовыми координатами, какъ это принято въ теоріи функцій мнимаго перемѣннаго, но трилинейными координатами, что позволяетъ внести въ теорію комплексныхъ чиселъ болѣе изящества и симметріи. Въ §§ 8—14 я подробно разбираю какой геометрическій смыслъ имѣютъ преобразованіе къ новымъ комплекснымъ единицамъ и основныя алгебраическія операціи сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія и въ § 16 указываю на характеръ геометрическихъ преобразованій, опредѣляемыхъ функціей комплекснаго перемѣннаго.

Февраль 1899 года.

---

[1]) On Double Algebra.

Списокъ упоминаемыхъ сочиненій и мемуаровъ.

1726 D. Bernoulli. Examen principiorum Mechanicae et demonstrationes Geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Petropolitanae, (1728), T. I, p. 126—142.

1750 D'Alembert. Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendu, mise en vibration. Histoire de l'Académie Royale de Berlin, 1752, p. 355—360.

1760 Daviet de Foncenex. Sur les principes fondamentaux de la mécanique. Miscellanea Taurinensia, T. II, p. 299—322.

1761 D'Alembert. Démonstration du principe de la composition des forces. Opuscules mathématiques, T. I, p. 169—179.

1769 D'Alembert. Mémoire sur les principes de la mécanique. Histoire de l'Académie Royale de Paris, 1772, p. 278—286.

? D'Alembert. Opuscules mathématiques, T. VI, p. 371.

1773 Laplace. Recherches sur l'integration des Equations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards. Memoires présentés à l'Académie Royale de Paris par divers Savants, 1774, p. 37—169, p. 74.

1788 Lagrange. Mécanique Analytique. Первое изд. 1788, второе—1811.

1804 Poinsot. Éléments de Statique.

1811 Poisson. Traité de mécanique. Paris, первое изданіе, T. I, p. 14—16.

1826 Cauchy. Sur la résultante et les projections de plusieurs forces appliquées à un seul point. Exercices de Mathématiques, 1826, p. 29—43.

1833 Poisson. Traté de mécanique. Paris, второе изданіе, T. I, p. 45.

1834 Poinsot. Théorie nouvelle de la rotation des corps.

1835-38 Н. И. Лобачевскій. Новыя начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ. Полное собраніе сочиненій по геометріи, T. I., стр. 219—486, стр. 227.

1836 Aimé. Démonstation du parallélogramme des forces. Journal des mathématiques pures et appliquées, T. I, p. 335—338.

1837 A. F. Möbius. Lehrbuch der Statik.

1837 Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Note XXXIV.

1855 A. Cayley. Recherches ultérieurs sur les déterminants gauches. Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 50, p. 299—313.

1859 A. Cayley. A sixt Memoir upon Quantics. Phil. Trans., Vol. 149, p. 61—90.

1864 Коши. Алгебраическій анализъ, p. 107—115.

1866 J. Plücker. Fundamental Views regarding Mechanics. Phil. Trans., Vol. 156, p. 361—380.

1867 Delambre. Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Compte J.-L. Lagrange. Oeuvres de Lagrange, T. I.

1868 J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes.

1868 Moigno. Leçons de Mécanique analytique. Paris, p. 6—18.

1868 J. de Tilly. Etudes de Mécanique abstraite. Mémoires couronés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, T. XXI, 1870.

* 1869 A. Genocchi. Atti della R. Academia delle scienze di Torino, vol. IV, p. 323—327.

* 1869-76 A. Genocchi. Memorie della Società Jtaliana delle Scienze, Série III, T. II, Florence, 1869—76.

1870 E. Schering. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen, 1870, p. 311—321.

1870 J. de Tilly. Note sur les surfaces a courbure moyenne constante. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 2 série, t. XXX.

1871 F. Klein. Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper. M. A., B. IV, p. 403—415.

1871 F. Klein. Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie. M. A., B. IV, p. 573—625.

1872 F. Klein. Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie. M. A., B. VI, p. 112—145.

1873 A. Genocchi. Lettre à M. Ad. Quettlet sur diverses questions mathématiques. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Bruxelles, 2 série, T. XXXVI, p. 181—192.

1873 J. de Tilly. Rapport de M. de Tilly. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 2 série. T. XXXVI, p. 124—139.

1873 W. K. Clifford. Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of London Math. Society, Vol. IV, p. 381—395. Также Papers, p. 181—200.

1873 F. Lindemann. Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. M. A., 1874, B. VII, p. 56—143.

1873. E. Schering. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehten Gaussischen und Riemannschen Raümen. Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen, p. 148—159.

1874 W. K. Clifford. Motion of a Solid in Elliptic Space. Papers, p. 378—384.

1874 F. Klein. Nachtrag zu dem «zweiten Aufsatze über Nicht-Euclidische Geometrie». M A., B. VII, p. 531—537.

1876 R. S. Ball. The theory of screws.

1876 W. K Clifford. On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid. Proceedings of the London Math. Society, Vol. VII, p. 67—70. Также Papers, p. 236—240.

1876 W. K. Clifford. Further Note on Biquaternions. Papers, p. 385—394.

1877 A. Genocchi. Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les Géométries Non-Euclidiennes. Memorie della Reale Academia delle scienze di Torino, Serie 2, T. XXIX, 1878, p. 365—404.

1880 F. Klein. Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe. M. A., B. XVII, p. 52—54.

1881 R. S. Ball. Certain Problems in the Dynamics of a Rigid System moving in Elliptic Space. Trans. of Jrish Academy, vol. XXVIII, p. 159—184.

1882 H. Cox. Homogeneous Coordinates in Jmaginary Geometry and their Application to System of Forces. Quarterly Journal, vol. XVIII.

1882 H. Cox. On the Application of Quaternions and Grassman's Ausdehnungslehre to different kinds of Uniform Space. Trans. of Cambridge Phil. Society, 1883, vol. XIII, p. 69—143.

1882 W. K. Clifford. Notes on Biquaternions. Papers, p. 395—396.

1882 W. K. Clifford. On the Theory of Screws in a Space of Constant Positive curvature. Papers, p. 402—405.

1882 W. K. Clifford. Notes, Papers, p. 642—643.

1884 R. S. Heath. On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space. Phil. Trans., 1885, Vol. 175, p. 281—324.

1884 A. Buchheim. On the Theory of Screws in Elliptic Space. Proceedings of London Math. Society, Vol. XV, p. 83—98.

1884 W. Killing. Die Mechanik in den Nicht-Euclidischen Raumformen. Journal fur die reine und angewandte Math., 1885, B. 98, p. 1—48.

1884 A. Cayley. On Double Algebra. Proceedings of London Math. Society, Vol. XV, p. 185—197.

1885 A. Buchheim. A memoir on Biquaternions. American Journal of Mathematics, Vol. VII, p. 293—326.

1885 A. Buchheim. On the Theory of Screws in Elliptic Space. Proceedings of London Math. Society, Vol. XVI, p. 15—27.

1886 A. Buchheim. On the Theory of Screws in Elliptic Space. Proceedings of London Math. Society, Vol. XVII, p. 239—254 and Vol. XVIII, p. 88—96.

1887 R. S. Ball. On the Theory of Content. Trans. of Jrish Academy, vol. XXIX, 123—182.

1889 H. Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme.

1890 F. Klein. Zur Nicht-Euclidische Geometrie. M. A., B. XXXVII, p. 544—572.

1890 A. Cayley, Non-Euclidian Geometry. Tans. of Cambridge Phil. Society, Vol. XV, p. 37—91.

1891 Fr. Schilling. Ueber die Geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente. M. A., B. XXXIX, p. 598—600.

1893-94 G. Scheffers. Verrallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen complexen Functionen. Berichte der Sächsischen Gesellschaft; 1893, p. 828—848; 1894, p. 120—134.

1895-96 А. Котельниковъ. Винтовое счисленіе. Уч. Зап. И. К. У. Сент. 1895 г., стр. 1—90; Ноябрь 1895 г., стр. 79—152; Янв. 1896 г., стр. 139—158; Февр. 1896 г., стр. 111—144.

1896 А. Котельниковъ. Винты и комплексныя числа. Извѣстія Каз. Ф.-М. Общ., 2 серія, т. VI, № 2, стр. 23—33.

1896 R. de Saussure. Sur une Géométrie de l'espace réglé. Comptes Rendus, vol. CXXIII, p. 734.

1896 R. de Saussure. Sur une Mécaniqne réglé. Comptes Rendus, vol. CXXIII, p. 796.

1896 R. de Saussure. Etude Géométrie cinématique réglée. Am. Journal of Math., Vol. XVIII, p. 304—346.

1897 R. de Saussure. Calcul Géométrique réglé. Am. Journal of Math., Vol. XIX, p. 329—370.

1897 J. Andrade. Sur la reduction des vecteurs et les propriétés metriques. Comptes Rendus, T. CXXV, p. 394—396.

1897 J. Andrade. Statique non-euclidienne. Verchandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zurich von 9. bis 11. August, 1897, p. 251—253.

1897 Д. Н. Зейлигеръ. Основныя формулы комплексной геометріи прямой. Уч. Зап. И. К. У., Декабрь 1897 г., стр. 93—108.

1898 J. Andrade. Leçons de Mécanique. Paris, p. 360—391.

1898 J. Andrade. Le groupe d'équivalence et ses bases cinématiques. Comptes Rendus, T. CXXVI, p. 1775—1777.

1898 R. S. Ball. The twelfth and concludiny memoir on the theory of screws with a summary. Trans. of Jrish Academy, Vol. XXXI, p. 145—196.

1898 П. Юшкевичъ. О сложеніи силъ въ гиперболическомъ пространствѣ. Вѣстникъ Оп. Ф. и Эл. М., Семестръ XXII, стр. 258—263 и 285—393.

Звѣздочкой отмѣчены мемуары, прочесть которые я не имѣлъ возможности.

Глава I.

1. **Комплексное число съ двумя единицами.**—Выраженіе $x_1e_1+x_2e_2$, въ которомъ x_1 и x_2 означаютъ положительныя, отрицательныя или обыкновенныя мнимыя числа, e_1 и e_2 суть нѣкоторые символы, называется комплекснымъ числомъ съ двумя единицами. Значеніе символовъ e_1 и e_2, именуемыхъ комплексными единицами, опредѣлится тѣми свойствами, которыя мы имъ дальше припишемъ. Знакъ $+$, входящій въ выраженіе, пока мы не опредѣлили операціи сложенія, нужно понимать въ томъ смыслѣ, что выраженіе $x_1e_1+x_2e_2$ должно быть разсматриваемо какъ нѣчто цѣлое, составленное изъ элементовъ x_1e_1 и x_2e_2. Означая комплексное число одной буквой x, пишутъ

$$x=x_1e_1+x_2e_2.$$

Два числа x и $y=y_1e_1+y_2e_2$ называютъ равными, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Числа

$$x_1e_1+0e_2,\quad 0e_1+x_2e_2,\quad 0e_1+0e_2,$$

считаютъ равными x_1e_1, x_2e_2 и нулю соотвѣтственно.

2. **Сложеніе и вычитаніе.**—Суммой чиселъ x и y, $x+y$, называютъ число

$$x+y=(x_1+y_1)e_1+(x_2+y_2)e_2.$$

Очевидно, что операція сложенія коммутативна и ассоціативна:

$$x+y=y+x,$$

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

гдѣ $z=z_1e_1+z_2e_2$.

Число $0=0e_1+0e_2$ есть модуль операціи сложенія, ибо отъ прибавленія его къ какому угодно числу это послѣднее

не измѣняется.

Опредѣляя вычитаніе какъ операцію обратную сложенію, имѣемъ $x—y=(x_1—y_1)e_1+(x_2—y_2)e_2$.

3. **Умноженіе и дѣленіе.**—Произведеніе комплекснаго числа x на положительное, отрицательное или обыкновенное мнимое число x_0 будемъ считать равнымъ произведенію x_0 на x и опредѣлимъ равенствомъ

$$x_0x=xx_0=(x_0x_1)e_1+(x_0x_2)e_2.$$

Благодаря такому условію и опредѣленію операціи сложенія, комплексное число x мы можетъ представить какъ сумму двухъ произведеній

$$(x_1.e_1)+(x_2.e_2).$$

Произведеніе $x.y$ опредѣлимъ двумя условіями. Во-первыхъ будемъ считать вторыя степени комплексныхъ единицъ и произведенія ихъ одну на другую комплексными числами, которыя пусть будутъ заданы слѣдующей таблицей умноженія:

$$\begin{aligned} e_1^2=e_1e_1&=a_{11}e_1+b_{11}e_2,\\ e_1e_2&=a_{12}e_1+b_{12}e_2,\\ e_2e_1&=a_{21}e_1+b_{21}e_2,\\ e_2^2=e_2e_2&=a_{22}e_1+b_{22}e_2. \end{aligned}$$

Во-вторыхъ условимся въ выраженіи

$$x.y=(x_1e_1+x_2e_2)(y_1e_1+y_2e_2)$$

раскрывать скобки такъ, какъ если бы e_1 и e_2 были обыкновенныя числа и замѣнять $x_1e_1.y_1e_1$, $x_1e_1.y_2e_2$, $x_2e_2.y_1e_1$, $x_2e_2.y_2e_2$, черезъ $(x_1y_1)e_1^2$, $(x_1y_2)e_1e_2$, $(x_2y_1)e_2e_1$, $(x_2y_2)e_2^2$.

Воспользовавшись послѣ такой замѣны таблицей умноженія, окончательно получаемъ:

$$\begin{aligned} xy=&(a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2)e_1\\ &+(b_{11}x_1y_1+b_{12}x_1y_2+b_{21}x_2y_1+b_{22}x_2y_2)e_2. \end{aligned}$$

Операція умноженія обладаетъ слѣдующими свойствами.

1. Умноженіе по отношенію къ сложенію двоякодистрибутивно, такъ что, означая черезъ z и t какія нибудь числа, имѣемъ

$$(x+y)(z+t)=xz+xt+yz+yt.$$

2. Умноженіе, вообще говоря, не коммутативно: $xy \neq yx$.

3. Умноженіе, вообще говоря, не ассоціативно: $(xy)z \neq x(yz)$.

Операція обратная умноженію называется операціей дѣленія. Предполагая данными два числа $x=x_1e_1+x_2e_2$ и $z=z_1e_1+z_2e_2$, она имѣетъ цѣлью опредѣлить число y такъ, чтобы

$$yx=z, \tag{1}$$

или такъ, чтобы

$$xy=z. \tag{2}$$

Такъ какъ операція умноженія не коммутативна, $yx \neq xy$, то различныя числа y будутъ удовлетворять указаннымъ двумъ ур., и мы должны различать двѣ операціи дѣленія. Впрочемъ, когда число x будетъ обыкновеннымъ числомъ, то $yx=xy$, обѣ операціи дѣлаются тожественными, и мы будемъ имѣть

$$y=\frac{z_1}{x}e_1+\frac{z_2}{x}e_2.$$

Если же число x будетъ комплекснымъ, то уравн. (1) распадется на два ур.

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)y_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)y_2&=z_1,\\ (b_{11}x_1+b_{12}x_2)y_1+(b_{21}x_1+b_{22}x_2)y_2&=z_2,\end{aligned}$$

а ур. (2) на ур.

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1+a_{21}x_2)y_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2)y_2&=z_1,\\ (b_{11}x_1+b_{21}x_2)y_1+(b_{12}x_1+b_{22}x_2)y_2&=z_2.\end{aligned}$$

Эти двѣ системы уравн. будутъ вообще говоря различны. Для того, чтобы обѣ операціи дѣленія вообще были возможны необходимо и достаточно, чтобы опредѣлители этихъ двухъ системъ

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2, & a_{21}x_1+a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1+b_{12}x_2, & b_{21}x_1+b_{22}x_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x'=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{21}x_2, & a_{12}x_1+a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1+b_{21}x_2, & b_{12}x_1+b_{22}x_2 \end{vmatrix}$$

не были бы тожественно, при произвольныхъ x_1 и x_2, равны нулю. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только системы комплексныхъ чиселъ, удовлетворяющія этому условію. Такія системы будемъ называть опредѣленными въ отличіе отъ другихъ системъ — неопредѣленныхъ, для которыхъ одинъ изъ опредѣлителей Δ_x, Δ_x' или оба тожественно обра-

щаются въ нуль. Для неопредѣленныхъ системъ операція дѣленія въ нѣкоторыхъ случаяхъ становится невозможной, а въ другихъ неопредѣленной.

Когда система комплексныхъ чиселъ коммутативна, то $yx=xy$, и мы имѣемъ только одну операцію дѣленія.

4. **Новыя единицы.**—Возьмемъ два комплексныхъ числа

$$e_1'=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2,$$
$$e_2'=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2.$$

Всякое линейное относительно e_1' и e_2' выраженіе

$$x_1'e_1'+x_2'e_2',$$

въ которомъ x_1' и x_2' суть положительныя, отрицательныя или обыкновенныя мнимыя числа, будетъ очевидно комплекснымъ числомъ

$$x_1e_1+x_2e_2,$$

гдѣ
$$x_1=x_1'\alpha_1+x_2'\beta_1,$$
$$x_2=x_1'\alpha_2+x_2'\beta_2.$$

Обратно, если $\Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$, то

$$e_1=(\beta_2 e_1'-\alpha_2 e_2'):\Delta,$$
$$e_2=(\alpha_1 e_2'-\beta_1 e_1'):\Delta, \qquad (3)$$

и всякое комплексное число $x_1e_1+x_2e_2$ мы можемъ представить въ видѣ выраженія линейнаго относительно e_1' и e_2'. Поэтому, назвавъ комплексныя числа e_1' и e_2' новыми комплексными единицами, выраженіе линейное относительно e_1' и e_2'—числомъ съ единицами e_1' и e_2', можемъ сказать, что всякое комплексное число съ единицами e_1 и e_2 можно представить въ видѣ комплекснаго числа съ единицами e_1' и e_2' и наоборотъ.

Понятно, что вслѣдствіе зависимости между системами съ единицами e_1' и e_2' и съ единицами e_1 и e_2 операціи надъ числами первой системы будутъ обусловлены соотвѣтствующими операціями надъ числами второй.

Легко видѣть, что сложеніе и вычитаніе чиселъ новой системы будутъ производиться совершенно такъе, какъ и соотвѣтствующія операціи надъ числами старой системы, и что сложеніе будетъ коммутативно и ассоціативно. Если мы означимъ черезъ x', y', z', числа x, y, z, выраженныя въ новыхъ единицахъ, то изъ равенства $x+y=z$ будетъ слѣдо-

вать равенство $x'+y'=z'$ и обратно изъ равенства второго— равенство первое.

Операціи умноженія и дѣленія новой системы опредѣляются соотвѣтствующей новой системѣ таблицей умноженія. Чтобы получить эту послѣднюю, составимъ произведенія $e_1'^2$, $e_1'e_2'$, $e_2'e_1'$, $e_2'^2$ и затѣмъ помощью (3) представимъ полученныя числа въ единицахъ e_1' и e_2'. Мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} e_1'^2 &= e_1'e_1' = \alpha_{11}e_1' + \beta_{11}e_2', \\ e_1'e_2' &= \alpha_{12}e_1' + \beta_{12}e_2', \\ e_2'e_1' &= \alpha_{21}e_1' + \beta_{21}e_2', \\ e_1'^2 &= e_2'e_2' = \alpha_{22}e_1' + \beta_{22}e_2', \end{aligned}$$

причемъ коэффиціенты новой таблицы умноженія опредѣлятся изъ равенствъ

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_1 + \beta_{11}\beta_1 &= A_{\alpha\alpha}, & \alpha_{21}\alpha_1 + \beta_{21}\beta_1 &= A_{\beta\alpha}, \\ \alpha_{11}\alpha_2 + \beta_{11}\beta_2 &= B_{\alpha\alpha}, & \alpha_{21}\alpha_2 + \beta_{21}\beta_2 &= B_{\beta\alpha}, \\ \alpha_{12}\alpha_1 + \beta_{12}\beta_1 &= A_{\alpha\beta}, & \alpha_{22}\alpha_1 + \beta_{22}\beta_1 &= A_{\beta\beta}, \\ \alpha_{12}\alpha_2 + \beta_{12}\beta_2 &= B_{\alpha\beta}, & \alpha_{22}\alpha_2 + \beta_{22}\beta_2 &= B_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

въ которыхъ для краткости положено:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= A_{11}\alpha_1 + A_{21}\alpha_2, & B_{\alpha\alpha} &= B_{11}\alpha_1 + B_{21}\alpha_2, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{11}\beta_1 + A_{21}\beta_2, & B_{\alpha\beta} &= B_{11}\beta_1 + B_{21}\beta_2, \\ A_{\beta\alpha} &= A_{12}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2, & B_{\beta\alpha} &= B_{12}\alpha_1 + B_{22}\alpha_2, \\ A_{\beta\beta} &= A_{12}\beta_1 + A_{22}\beta_2, & B_{\beta\beta} &= B_{12}\beta_1 + B_{22}\beta_2, \end{aligned}$$

и далѣе

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2, & B_{11} &= b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2, \\ A_{21} &= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2, & B_{21} &= b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2, \\ A_{12} &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2, & B_{12} &= b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_2, \\ A_{22} &= a_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2, & B_{22} &= b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_2. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, покажемъ, что преобразованіе къ новымъ единицамъ обладаетъ слѣдующими свойствами.

I. Если $x'=x_1'e_1'+x_2'e_2'$, $y'=y_1'e_1'+y_2'e_2'$, $z'=z_1'e_1'+z_2'e_2'$, суть числа $x=x_1e_1+x_2e_2$, $y=y_1e_1+y_2e_2$, $z=z_1e_1+z_2e_2$, выра-

женныя въ новыхъ единицахъ, то изъ равенства $xy=z$ будетъ слѣдовать $x'y'=z'$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $z=xy$, такъ что

$$z_1=(a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2)x_2,$$
$$z_2=(b_{11}y_1+b_{12}y_2)x_1+(b_{21}y_1+b_{22}y_2)x_2.$$

Внося во вторыя части вмѣсто x_1, x_2, y_1, y_2, ихъ выраженія черезъ x_1', x_2', y_1', y_2':

$$x_1=x_1'\alpha_1+x_2'\beta_1, \quad y_1=y_1'\alpha_1+y_2'\beta_1,$$
$$x_2=x_1'\alpha_2+x_2'\beta_2, \quad y_2=y_1'\alpha_2+y_2'\beta_2,$$

находимъ сначала:

$$z_1=(A_{\alpha\alpha}y_1'+A_{\alpha\beta}y_2')x_1'+(A_{\beta\alpha}y_1'+A_{\beta\beta}y_2')x_2',$$
$$z_2=(B_{\alpha\alpha}y_1'+B_{\alpha\beta}y_2')x_1'+(B_{\beta\alpha}y_1'+B_{\beta\beta}y_2')x_2',$$

и потомъ:

$$z_1'=(\beta_2z_1-\beta_1z_2):\Delta=(\alpha_{11}y_1'+\alpha_{12}y_2')x_1'+(\alpha_{21}y_1'+\alpha_{22}y_2')x_2',$$
$$z_2'=(\alpha_1z_2-\alpha_2z_1):\Delta=(\beta_{11}y_1'+\beta_{12}y_2')x_1'+(\beta_{21}x_1'+\beta_{22}y_2')x_2',$$

откуда слѣдуетъ, что

$$x'y'=z'.$$

Такъ какъ преобразованіе единицъ e_1, e_2, въ единицы e_1' и e_2' имѣетъ такой же характеръ, то понятно, что изъ равенства $x'y'=z'$ будетъ слѣдовать $xy=z$.

II. Означивъ черезъ D_x и D_x' опредѣлители

$$D_x=\begin{vmatrix} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2, & \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2 \\ \beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2, & \beta_{21}x_1+\beta_{22}x_2 \end{vmatrix},$$

$$D_x'=\begin{vmatrix} \alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2, & \alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2 \\ \beta_{11}x_1+\beta_{21}x_2, & \beta_{12}x_1+\beta_{22}x_2 \end{vmatrix},$$

составленные изъ коэффиціентовъ новой таблицы умноженія такъ, какъ опредѣлители Δ_x и Δ_x' составлены изъ коэффиціентовъ старой, имѣемъ такую теорему.

Если x' есть число x, выраженное въ новыхъ единицахъ, то

$$D_{x'}\equiv\Delta_x$$
$$D'_{x'}\equiv\Delta'_x$$

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе

$$\Delta\Delta_x = \begin{vmatrix} A_{11}x_1 + A_{21}x_2, & A_{12}x_1 + A_{22}x_2 \\ B_{11}x_1 + B_{21}x_2, & B_{12}x_1 + B_{22}x_2 \end{vmatrix}$$

тожественно обращается въ произведеніе

$$\Delta D_{x'} = \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha}x_1' + A_{\alpha\xi}x_2', & A_{\beta\alpha}x_1' + A_{\beta\xi}x_2' \\ B_{\alpha\alpha}x_1' + B_{\alpha\xi}x_2', & B_{\beta\alpha}x_1' + B_{\beta\beta}x_2' \end{vmatrix},$$

если въ немъ выразимъ x_1 и x_2 черезъ x_1' и x_2':

$$\Delta\Delta_x \equiv \Delta D_{x'},$$

и слѣдовательно $$\Delta_x \equiv D_{x'}.$$

Также докажемъ справедливость и втораго тожества $\Delta_{x'} \equiv D'_{x'}$.

III. Если система комплексныхъ чиселъ съ единицами e_1, e_2 коммутативна, ассоціативна и опредѣленна, то таковыми же свойствами будетъ обладать и система съ единицами e_1', e_2'.

Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь теоремой первой, легко показать, что

$$x'y' = y'x',$$
$$x'(y'z') = (x'y')z',$$

для произвольныхъ x', y', z', если $xy = yx$ и $x(yz) = (xy)z$, т. е. что свойство коммутативности и ассоціативности системы (e_1, e_2) переходятъ и на систему (e_1', e_2'). Изъ теоремы второй будетъ слѣдовать, что опредѣлители D_x и $D_{x'}$ не будутъ тожественно равны нулю, если опредѣлители Δ_x и $\Delta_{x'}$ отличны отъ нуля, т. е., что система (e_1', e_2') будетъ опредѣленна, если такова же и система (e_1, e_2).

Вслѣдствіе того, что многія весьма важныя свойства системы (e_1, e_2) переходятъ и на систему (e_1', e_2'), весьма естественно отнести двѣ системы, которыя могутъ быть преобразованы одна въ другую, къ одному классу. И тогда возникаетъ вопросъ сколько и какіе классы комплексныхъ чиселъ съ двумя единицами мы можемъ различать, каковы ихъ характерные признаки, и къ какому простѣйшему виду могутъ быть приведены комплексныя числа одного класса. Мы зай-

мемся рѣшеніемъ этого вопроса только для опредѣленныхъ, коммутативныхъ и ассоціативныхъ системъ, которыя представляютъ, конечно, среди другихъ системъ наибольшій интересъ.

5. **Условія коммутативности и ассоціативности.**—Операція умноженія вполнѣ характеризуется таблицей умноженія. Разсмотримъ теперь какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты этой таблицы для того, чтобы умноженіе было или коммутативно, или ассоціативно, или, наконецъ, одновременно обладало бы этими двумя свойствами.

Умноженіе будетъ коммутативно, если

$$e_1 e_2 = e_2 e_1.$$

Это равенство распадается на два

$$a_{12} = a_{21}, \quad b_{12} = b_{21},$$

которыя и будутъ условіями коммутативности умноженія, необходимыми и достаточными.

Умноженіе будетъ ассоціативно, если умноженіе комплексныхъ единицъ, взятыхъ всевозможными способами по три, будетъ ассоціативно, т. е.

$$\begin{array}{ll} (e_1e_1)e_1 = e_1(e_1e_1), & (e_2e_1)e_1 = e_2(e_1e_1), \\ (e_1e_1)e_2 = e_1(e_1e_2), & (e_2e_1)e_2 = e_2(e_1e_2), \\ (e_1e_2)e_1 = e_1(e_2e_1), & (e_2e_2)e_1 = e_2(e_2e_1), \\ (e_1e_2)e_2 = e_1(e_2e_2), & (e_2e_2)e_2 = e_2(e_2e_2). \end{array}$$

Между 16 равенствами, на которыя распадаются эти 8, только 12

$$\left\| \begin{array}{c} a_{12},\ b_{11},\ a_{11}-b_{12} \\ a_{22},\ b_{12},\ a_{12}-b_{22} \end{array} \right\| = 0 \qquad (4)$$

$$\left\| \begin{array}{c} a_{22},\ b_{12},\ a_{12}-b_{22} \\ a_{22},\ b_{21},\ a_{21}-b_{22} \end{array} \right\| = 0 \qquad (5)$$

$$\left\| \begin{array}{c} a_{22},\ b_{21},\ a_{21}-b_{22} \\ a_{21},\ b_{11},\ a_{11}-b_{21} \end{array} \right\| = 0 \qquad (6)$$

$$\left\| \begin{array}{c} a_{21},\ b_{11},\ a_{11}-b_{21} \\ a_{12},\ b_{11},\ a_{11}-b_{12} \end{array} \right\| = 0 \qquad (7)$$

различныхъ. Они будутъ необходимыми и достаточными условіями ассоціативности умноженія. Такъ какъ вторая строка каждой матрицы одинакова съ первой слѣдующей матрицы, то среди 12 равенствъ только 6 независимыхъ.

Разсмотримъ подробнѣе условія ассоціативности. Если система коммутативна, и слѣдовательно $a_{12}=a_{21}$, $b_{12}=b_{21}$, то равенство (5) и (7) обращаются въ тожества, равенства (6) дѣлаются одинаковыми съ (4) и такимъ образомъ остается только три различныхъ равенства (4), изъ которыхъ одно есть слѣдствіе двухъ другихъ.

Итакъ для того, чтобы умноженіе было коммутативно и ассоціативно, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{12}=a_{21},\ b_{12}=b_{21}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{12}, & b_{11}, & a_{11}-b_{12} \\ a_{22}, & b_{12}, & a_{12}-b_{22} \end{matrix} \right\| =0. \qquad (8)$$

Если система будетъ не коммутативна, то или $a_{12}\neq a_{21}$, или $b_{12}\neq b_{21}$, или оба неравенства будутъ имѣть мѣсто одновременно. Пусть $a_{12}\neq a_{21}$. Если бы случилось, что $a_{12}=a_{21}$, но $b_{12}\neq b_{21}$, то этотъ случай мы привели бы къ предыдущему, обмѣнявъ обозначеніями комплексныя единицы e_1 и e_2.

Предполагая $a_{12}\neq a_{21}$ и $a_{12}\neq 0$, легко найдемъ

$$a_{11}=b_{21},\ a_{12}=b_{22},\ a_{21}=0\ ,\ a_{22}=0\ ,$$
$$b_{11}=0\ ,\ b_{12}=0\ ,\ b_{21}=a_{11},\ b_{22}=a_{12}.$$

Предполагая $a_{12}\neq a_{21}$ и $a_{21}\neq 0$, будемъ имѣть

$$a_{11}=b_{12},\ a_{12}=0\ ,\ a_{21}=b_{22},\ a_{22}=0\ ,$$
$$b_{11}=0\ ,\ b_{12}=a_{11},\ b_{21}=0\ ,\ b_{22}=a_{21}.$$

Такимъ образомъ существуютъ двѣ ассоціативныя некоммутативныя системы. Обѣ эти системы неопредѣленны, ибо для первой опредѣлитель $\Delta_x'\equiv 0$, а для второй $\Delta_x\equiv 0$. Итакъ некоммутативныя ассоціативныя системы суть системы неопредѣленныя.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для опредѣленныхъ системъ свойство ассоціативности всегда будетъ сопровождаться свойствомъ коммутативности.

6. **Модуль операціи умноженія и первое упрощеніе системы.**—Мы будемъ изучать только опредѣленныя, коммутативныя и ассоціативныя системы. Докажемъ, что для каждой такой системы существуетъ одно вполнѣ опредѣленное число

$$\mu=\mu_1 e_1+\mu_2 e_2,$$

которое обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что

$$u\mu=\mu u=u,$$

каково бы ни было число u. Съ этою цѣлью возьмемъ число x такъ, чтобы $\Delta_x\neq 0$. Тогда изъ равенствъ $x\mu=x$, $zx=u$, гдѣ u совершенно произвольное число, можемъ опредѣлить числа z и μ, и, пользуясь свойствами коммутативности и ассоціативности, будемъ имѣть

$$u=zx=z(x\mu)=(zx)\mu=u\mu=\mu u.$$

Такимъ образомъ, всякое число, будучи умножено на μ, не измѣняется. Существуетъ только одно число μ, обладающее этимъ свойствомъ, ибо рѣшеніе уравненія $x\mu=x$ относительно μ единственно. Число μ называется модулемъ операціи умноженія.

Итакъ для опредѣленной ассоціативной и коммутативной системы существуетъ модуль операціи умноженія.

Предположимъ теперь обратно, что система комплексныхъ чиселъ имѣетъ модуль μ, такъ что $u\mu=\mu u=u$ каково бы ни было число u. Примемъ μ и какое нибудь произвольное число $\omega=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2$, которое было бы подчинено единственному условію

$$\omega_1\mu_2-\omega_2\mu_1\neq 0,$$

за новыя единицы. Вслѣдствіе свойствъ числа μ будемъ имѣть

$$\mu^2=\mu\mu=\mu,$$
$$\mu\omega=\omega,\qquad \omega^2=-\beta\mu+\alpha\omega,$$
$$\omega\mu=\omega,$$

гдѣ β и α нѣкоторыя обыкновенныя числа. Нетрудно убѣдиться, что система комплексныхъ чиселъ $(\mu,\ \omega)$ съ такой таблицей умноженія всегда опредѣленна, коммутативна и ассоціативна. Слѣдовательно, на основаніи § 4, такими же свойствами будетъ обладать и первоначально данная система, относительно которой мы сдѣлали предположеніе, что она имѣетъ модуль.

Итакъ, если система комплексныхъ чиселъ имѣетъ модуль операціи умноженія, то она опредѣленна, коммутативна и ассоціативна.

Эту теорему вмѣстѣ съ предыдущей мы можемъ соединить въ одну.

Теорема I. — *Чтобы система была опредѣленна, коммутивна и ассоціативна необходимо и достаточно, чтобы для нея существовалъ модуль операціи умноженія.*

Такимъ образомъ системы, которыя мы будемъ изучать, можно кратко характеризовать какъ системы съ модулемъ умноженія.

Разсматривая таблицу умноженія, которую мы получаемъ, если модуль примемъ за одну изъ комплексныхъ единицъ, видимъ, что μ можно замѣнить обыкновенной единицей. И въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ

$$\mu\mu=\mu,\ \mu\omega=\omega,\ \omega\mu=\omega$$

и соотвѣтственно этому

$$1.1=1,\ 1.\omega=\omega,\ \omega.1=\omega.$$

Замѣняя μ обыкновенной единицей, мы приводимъ комплексное число $x_1\mu+x_2\omega$ съ единицами μ и ω къ виду $x_1+x_2\omega$ и тѣмъ самымъ включаемъ положительныя, отрицательныя и обыкновенныя мнимыя числа въ область разсматриваемыхъ нами комплексныхъ чиселъ, ибо число $x_1+x_2\omega$ обращается въ обыкновенное число x_1, если $x_2=0$. Послѣ указанной замѣны вмѣсто четырехъ равенствъ таблицы умноженія у насъ остается только одно

$$\omega^2=-\beta+\alpha\omega,$$

которое опредѣляетъ вторую степень комплексной единицы ω и можетъ быть приведено къ виду

$$\omega^2=-x_1x_2+(x_1+x_2)\omega$$

или

$$(\omega-x_1)(\omega-x_2)=0,$$

гдѣ x_1 и x_2 суть корни квадратнаго уравненія

$$\lambda^2-\lambda\alpha+\beta=0.$$

Равенство, опредѣляющее вторую степень ω, будемъ называть характеристическимъ равенствомъ системы комплексныхъ чиселъ.

Что касается до чиселъ α, β, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, то замѣтимъ слѣдующее. Если коэффиціенты a_{11}, a_{12},...первоначально данной таблицы умноженія дѣйствительны, то μ_1 и μ_2, будучи корнями двухъ линейныхъ уравненій съ дѣйствительными коэффиціентами, будутъ также дѣйствительны. Слѣдовательно, если предложимъ, что ω_1 и ω_2 дѣйствительны, что всегда возможно, такъ какъ ихъ выборъ зависитъ отъ насъ, то коэффиціенты преобразованія къ новымъ единицамъ μ и ω, а значитъ и коэффиціенты новой таблицы умноженія, α и β, будутъ также дѣйствительны. Числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ будутъ или дѣйствительными, или мнимыми сопряженными числами. Резюмируя сказанное, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема II.—*Комплексныя числа системы, для которой существуетъ модуль умноженія всегда можно, принявъ модуль за одну изъ комплексныхъ единицъ, привести къ виду*

$$x_1 + x_2\omega,$$

причемъ вторая степень комплексной единицы ω опредѣлится характеристическимъ равенствомъ

$$\omega^2 = -\varkappa_1\varkappa_2 + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\omega \qquad (9)$$

или

$$(\omega - \varkappa_1)(\omega - \varkappa_2) = 0$$

въ которомъ $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ суть нѣкоторыя обыкновенныя числа. Они будутъ дѣйствительными или мнимыми сопряженными числами, если коэффиціенты первоначально данной таблицы умноженія дѣйствительны.

7. **Классы и типы комплексныхъ чиселъ съ модулемъ.**—Если вмѣсто комплексной единицы ω введемъ новую $\omega' = \omega_1' + \omega_2'\omega (\omega_2' \neq 0)$, то разсматриваемыя комплексныя числа по прежнему будутъ имѣть видъ

$$x_1 + x_2\omega',$$

причемъ вторая степень ω' очевидно будетъ опредѣляться характеристическимъ равенствомъ

$$\omega'^2 = -\beta' + \alpha'\omega',$$

гдѣ β' и α' суть нѣкоторыя обыкновенныя числа.

Когда $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, то положивъ

$$\omega' = \frac{2\omega - (\varkappa_1 + \varkappa_2)}{\varkappa_2 - \varkappa_1}; \qquad (10)$$

будемъ имѣть

$$\omega'^2 = 1.$$

Это равенство не содержитъ ни $\varkappa_1$, ни $\varkappa_2$. Слѣдовательно всѣ системы комплексныхъ чиселъ, для которыхъ $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, могутъ быть приведены къ одному виду и стало быть преобразованны одна въ другую введеніемъ новыхъ единицъ. Всѣ эти системы принадлежатъ къ одному классу. Если положимъ

$$\omega' = i\frac{2\omega - (\varkappa_1 + \varkappa_2)}{\varkappa_2 - \varkappa_1}, \qquad (11)$$

то характеристическое равенство приметъ видъ $\omega'^2 = -1$.

Когда $\varkappa_1 = \varkappa_2$ и слѣдовательно $(\omega - \varkappa_1)^2 = 0$, положивъ

$$\omega' = \omega - \varkappa_1, \qquad (12)$$

будемъ имѣть

$$\omega'^2 = 0.$$

Такъ какъ это равенство не содержитъ $\varkappa_1$, то всѣ системы комплексныхъ чиселъ, для которыхъ $\varkappa_1 = \varkappa_2$, могутъ быть преобразованы одна въ другую и, слѣдовательно, всѣ принадлежатъ къ одному классу.

Легко видѣть, что система, для которой $\omega'^2 = 1$, не можетъ быть введеніемъ новыхъ единицъ преобразована въ систему, для которой $\omega'^2 = 0$, ибо вторая степень

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\omega'$$

какого нибудь числа $x = x_1 + x_2\omega'$ первой системы можетъ быть равна нулю только тогда, когда само число $x = 0$, между тѣмъ какъ во второй системѣ есть такое число ω' отличное отъ нуля, что $\omega'^2 = 0$. Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую теорему.

Теорема I.—*Всѣ системы съ модулемъ операціи умноженія можно раздѣлить на два класса. Для чиселъ перваго класса* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *различны, и характеристическое равенство можетъ быть приведено по нашему желанію къ виду* $\omega^2 = 1$, *или* $\omega^2 = -1$. *Для чиселъ втораго класса* $\varkappa_1 = \varkappa_2$, *и характеристическое равенство приводится къ виду* $\omega^2 = 0$.

Въ предыдущемъ, вводя новую комплексную единицу $\omega' = \omega_1' + \omega_2'\omega$, мы не обращали вниманія на то, будутъ ли коэффиціенты ω_1' и ω_2' дѣйствительны или нѣтъ. Но если коэффиціенты первонально данной таблицы умноженія, а слѣдовательно и числа $\alpha = (\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $\beta = \varkappa_1\varkappa_2$ будутъ дѣйствительны, то весьма естественно ограничить выборъ коэффиціентовъ ω_1' и ω_2' условіемъ, чтобы они также были дѣйствительны.

При такомъ ограниченіи мы должны будемъ различать три типа системъ.

Когда $\varkappa_1 = \varkappa_2$, то можетъ быть два случая. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ дѣйствительны, то преобразованіе (10) будетъ дѣйствительнымъ, а преобразованіе (11) мнимымъ и, воспользовавшись первымъ, мы будемъ имѣть $\omega'^2 = 1$. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ будутъ мнимыми и сопряженными, то преобразованіе (10) будетъ мнимымъ, а (11)—дѣйствительнымъ, и, воспользовавшись вторымъ, мы будемъ имѣть $\omega'^2 = -1$. Понятно, что въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не обращаемъ вниманія на то, будутъ ли коэффиціенты преобразованія дѣйствительны или нѣтъ, между преобразованіями (10) и (11) нѣтъ существенной разницы, по желанію мы можемъ употребить то или другое и систему комплекныхъ чиселъ, для которой $\omega'^2 = 1$, можемъ преобразовать въ систему, для которой $\omega'^2 = -1$. Если же коэффиціенты преобразованія должны быть дѣйствительны, то первую систему нельзя преобразовать во вторую. Ибо въ первой системѣ нѣтъ такого числа $x_1 + x_2\omega'$ съ дѣйствительными коэффиціентами, вторая степень котораго равнялась бы—1, а во второй системѣ такое число есть: это число ω' (11). Называя систему комплексныхъ чиселъ, у которой $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ дѣйствительны и различны, гиперболической, а систему, для которой $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ мнимы и сопряженны,—эллиптической, мы видимъ такимъ образомъ, что хотя эллиптическія и гиперболическія системы принадлежатъ къ одному классу, однако дѣйствительнымъ преобразованіемъ не могутъ быть переведены одна въ другую.

Если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, то $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ дѣйствительны, и мы можемъ употребить прежнее преобразованіе: будемъ имѣть $\omega'^2 = 0$. Систему, для которой $\varkappa_1 = \varkappa_2$, мы будемъ называть параболической.

Итакъ, резюмируя сказанное, мы имѣемъ теорему.

Теорема II.—*Системы съ дѣйствительными коэффиціентами въ таблицѣ умноженія можно раздѣлить на три типа: системы гиперболическія, эллиптическія и параболическія. Числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ для перваго типа дѣйствительны и различны, для второго—мнимы и сопряженны, для третьяго —дѣйствительны и равны. Характеристическое равенство можетъ быть дѣйствительнымъ преобразованіемъ приведено къ виду $\omega^2 = 1$ для чиселъ перваго типа, $\omega^2 = -1$ — второго и $\omega^2 = 0$ — третьяго.*

Системы эллиптическія и гиперболическія принадлежатъ къ первому классу, системы параболическія ко второму.

Хотя на основаніи этой теоремы мы можемъ ограничиться изученіемъ трехъ весьма простыхъ системъ комплексныхъ чиселъ вида $x_1+x_2\omega$, для которыхъ ω^2 равняется или 0, или 1, или—1, мы предпочтемъ однако изученіе или системы общаго вида $x_1e_1+x_2e_2$ съ произвольными единицами e_1 и e_2, или же системы вида $x_1+x_2\omega$ съ характеристическимъ уравненіемъ

$$\omega^2=-\varkappa_1\varkappa_2+(\varkappa_1+\varkappa_2)\omega,$$

къ которой мы непосредственно приходимъ, если примемъ модуль операціи умноженія за одну изъ комплексныхъ единицъ, оставивъ другую единицу совершенно произвольной. Ибо, во-первыхъ, типическія системы представляютъ частные случаи этой послѣдней для слѣдующихъ значеній $\varkappa_1$, $\varkappa_2$:

$$1)\ \varkappa_1=-\varkappa_2=1,$$
$$2)\ \varkappa_1=-\varkappa_2=i,$$
$$3)\ \varkappa_1=-\varkappa_2=0,$$

и такимъ образомъ мы замѣняемъ изученіе трехъ системъ изученіемъ одной, и во-вторыхъ при изслѣдованіи болѣе общей системы яснѣе выступаютъ геометрическія свойства системъ съ модулемъ умноженія.

8. **Геометрическое изображеніе комплексныхъ чиселъ.**— Комплексное число съ двумя единицами мы можемъ представить на плоскости или точкой, или прямой линіей. Съ этой цѣлью мы будемъ пользоваться трилинейной системой координатъ.

Проведемъ какія нибудь три прямыя линіи d_1, d_2, d_3 такъ, чтобы точки ихъ пересѣченія O_1, O_2, O_3 не сливались бы въ одну и возьмемъ точку E, которая не лежитъ ни на одной изъ прямыхъ d. Принимая точку E за единичную точку, прямыя d_1, d_2, d_3—за стороны основнаго треугольника трилинейной системы координатъ, означимъ черезъ X_1, X_2, X_3 трилинейныя координаты какой нибудь точки P. Зная трилинейныя координаты точки P мы можемъ опредѣлить отношенія

$$x_1=X_1:X_3,\ x_2=X_2:X_3.$$

Обратно по даннымъ отношеніямъ x_1 и x_2 мы найдемъ трилинейныя координаты точки P:

$$X_1=\sigma x_1,\ X_2=\sigma x_2,\ X_3=\sigma$$

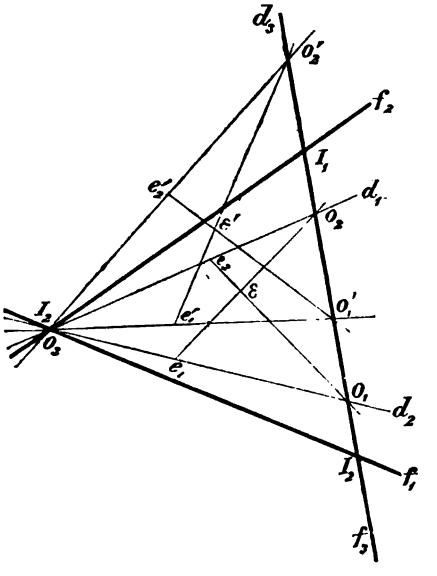
гдѣ σ произвольный множитель пропорціональности. Поэтому отношенія x_1 и x_2 мы можемъ въ свою очередь принять за координаты точки P; въ отличіе отъ трилинейныхъ я назову ихъ ангармоническими кооринатами точки P. ибо

$$x_1 = \frac{X_1}{X_3} = O_2(O_1O_3EP)$$

—ангармоническому отношенію четырехъ лучей, идущихъ изъ точки O_2 къ точкамъ O_1, O_3, E, P соотвѣтственно,

$$x_2 = \frac{X_2}{X_3} = O_1(O_2O_3EP)$$

Чертежъ 1.



—ангармоническому отношенію лучей идущихъ изъ O_1 къ точкамъ O_2, O_3, E, P. Замѣтимъ что

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_1}{X_2} = O_3(O_1O_2EP).$$

Когда мы употребляемъ ангармоническія координаты, то прямая d_3 и точка O_3 играютъ иную роль чѣмъ прямыя d_1, d_2 и точки O_1 и O_2. Назову прямую d_3 горизонтомъ, точку O_3 —началомъ координатъ, прямыя d_1, d_2—координатными осями и точки O_1 и O_2—координатными точками. Точки e_1 и e_2 пересѣченія прямыхъ O_2E, O_1E съ d_2 и d_1 назову точками

масштаба. Очевидно, что положеніе осей координатъ и единичной точки будетъ извѣстно, если намъ даны точки масштаба.

Комплексное число $x=x_1e_1+x_2e_2$ я буду изображать точкой, ангармоническія координаты которой суть

$$x_1,\ x_2$$

и трилинейныя:

$$X_1=\sigma x_1,\ X_2=\sigma x_2,\ X_3=\sigma.$$

Эту точку, изображающую число x, назову точкой x. Легко видѣть, что всякое число x съ конечными и опредѣленными коэффиціентами x_1, x_2 будетъ изображаться нѣкоторою опредѣленною точкой, которая не лежитъ на горизонтѣ, и обратно всякая точка плоскости, на горизонтѣ не лежащая (не исключая и безконечно удаленныхъ точекъ), будетъ представлять нѣкоторое число x съ конечными и опредѣленными коэффиціентами. Числа вида

$$\infty e_1+\infty e_2$$

будутъ изображаться точками горизонта (ибо $X_3=0$), при чемъ опредѣленному отношенію безконечно большихъ коэффиціентовъ будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка горизонта. Число

$$x_1e_1+\infty e_2=\infty(0e_1+x_2e_2),$$

гдѣ x_1 и x_2 конечны изобразится точкой O_2, число

$$\infty e_1+x_2e_2=\infty(x_1e_1+0e_2),$$

гдѣ x_1 и x_2 конечны—точкой O_1. Комплексныя единицы будутъ изображаться точками масштаба e_1 и e_2, число e_1+e_2—единичною точкой E.

Вмѣсто того, чтобы изображать комплексное число x точкой x съ трилинейными координатами X_1, X_2, X_3 мы можемъ также хорошо представить ее прямой линіей, координаты которой относительно той же системы координатъ суть X_1, X_2, X_3. Конечно свойства комплексныхъ чиселъ получатъ различный геометрическій смыслъ, смотря по тому, будемъ ли мы представлять комплексное число точкой или прямой. Но очевидно, что геометрическія толкованія въ обоихъ случаяхъ не будутъ независимы одно отъ другаго, но будутъ связаны между собой согласно съ принципомъ двойственности. Поэтому въ дальнѣйшемъ намъ нѣтъ надобности разсматри-

вать подробно оба способа геометрическаго представленія комплекснаго числа, но достаточно избрать какой нибудь одинъ изъ нихъ: мы будемъ изображать комплексное число точкой.

9. **Новыя единицы.**—Если вмѣсто комплексныхъ единицъ e_1 и e_2 мы введемъ новыя $e_1'=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$, $e_2'=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2$, то число $x=x_1 e_1+x_2 e_2$ приметъ видъ (§ 4)

$$x=x_1' e_1'+x_2' e_2'$$

гдѣ

$$x_1'=(\beta_2 x_1-\beta_1 x_2):\Delta,\ x_2'=(\alpha_1 x_2-\alpha_2 x_1):\Delta.$$

Изобразивъ числа x, e_1', e_2' согласно нашему условію точками x, e_1', e_2', легко показать какой геометрическій смыслъ будутъ имѣть величины x_1' и x_2'. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ трилинейныя координаты точки O_2' пересѣченія прямой Oe_2' съ горизонтомъ суть

$$\beta_1,\ \beta_2,\ 0,$$

и слѣдовательно уравн. прямыхъ $O_2'e_1'$, $O_2'x$, $O_2'O_1'$, $O_2'O_3$ таковы:

$$\begin{aligned}
X_1\beta_2-X_2\beta_1-X_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)&=0,\\
X_1\beta_2-X_2\beta_1-X_3(x_1\beta_2-x_2\beta_1)&=0,\\
X_3&=0,\\
X_1\beta_2-X_2\beta_1&=0,
\end{aligned}$$

то $$O_2'(O_1'O_3e_1'x)=(x_1\beta_2-x_2\beta_1):\Delta=x_1';$$

также покажемъ, что, означая черезъ O_1' точку пересѣченія Oe_1' съ горизонтомъ,

$$O_1'(O_2'O_3e_2'x)=(\alpha_1 x_2-\alpha_2 x_1):\Delta=x_2'.$$

Не измѣняя положенія горизонта и начала координатъ, примемъ прямыя O_3e_1' и O_3e_2' за новыя оси координатъ, e_1', e_2' —за новыя точки масштаба и, слѣдовательно, точку E'—за новую единичную точку; тогда x_1' и x_2' будутъ новыми ангармоническими координатами точки x. Число $x_1'e_1'+x_2'e_2'$ будетъ изображаться той же самой точкой, какой изображается и число $x_1e_1+x_2e_2$, но отнесеной къ новой системѣ координатъ, которая имѣетъ прежнее начало и горизонтъ и отличается отъ старой направленіемъ осей и единичной точкой. Введеніе но-

выхъ комплексныхъ единицъ соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, преобразованію координатъ.

Теорема.—*Введя новыя комплексныя единицы* e_1' *и* e_2', *мы не измѣняемъ положенія точки, изображающей какое нибудь комплексное число, но измѣняемъ систему координатъ, къ которой эта точка отнесена, принимая точки, изображающія новыя единицы* e_1' *и* e_2' *за новыя точки масштаба и оставляя начало координатъ и горизонтъ безъ перемѣны.*

Мы видѣли въ § 4, что, означивъ черезъ x'; y', z' числа x, y, z выраженныя въ новыхъ единицахъ, мы будемъ имѣть $x'+y'=z'$, если $x+y=z$, и $x'.y'=z$, если $xy=z$.

Пользуясь предыдущей теоремой, мы можемъ теперь дать геометрическое толкованіе этимъ свойствамъ преобразованія къ новымъ единицамъ. Числа x' и x будутъ изображаться одной и той же точкой, то же будетъ справедливо относительно y и y', z и z'. Слѣдовательно преобразованіе къ новымъ комплекснымъ единицамъ не будетъ измѣнять не только положенія точекъ, изображающихъ данныя числа x и y, но также и тѣхъ точекъ, которыя изображаютъ сумму этихъ чиселъ и ихъ произведеніе. Геометрическія свойства построеній, отвѣчающихъ операціямъ сложенія и умноженія, не будутъ поэтому зависѣть отъ той или другой системы координатныхъ осей, а только отъ относительнаго положенія точекъ, изображающихъ слагаемыя или перемножаемыя числа, относительно начала координатъ и горизонта. Эти заключенія весьма важны, такъ какъ опираясь на нихъ, мы можемъ, изучая геометрическія свойства операціи сложенія и умноженія, выбрать оси координатъ и единичную точку по нашему желанію. Впрочемъ геометрическія построенія, отвѣчающія операціи сложенія, настолько просты, что раскрыть ихъ свойства не представляетъ никакихъ затрудненій, каковы бы ни были единицы.

10. **Сложеніе и вычитаніе.** — Точку z, изображающую сумму $z=x+y$, когда даны точки x и y, изображающія слагаемыя, можно построить слѣдующимъ образомъ.

Правило.—*Чтобы построить точку* z, *изображающую сумму двухъ чиселъ* x *и* y, *опредѣляемъ точки* a *и* b *пересѣченія горизонта съ прямыми* Ox *и* Oy *и проводимъ прямыя* xb *и* ya. *Точка пересѣченія послѣднихъ и будетъ точкой* z.

Въ самомъ дѣлѣ, трилинейныя координаты точекъ a и b соотвѣтственно суть

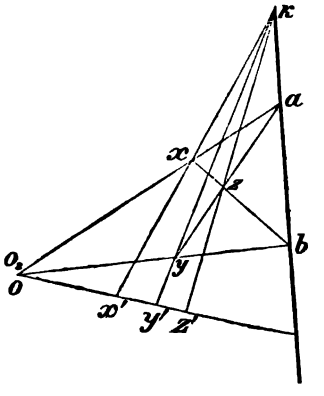
$$x_1, x_2, 0; \quad y_1, y_2, 0.$$

Слѣдовательно уравненіе прямыхъ ya и xb соотвѣтственно будутъ

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ y_1, & y_2, & 1 \\ x_1, & x_2, & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ y_1, & y_2, & 1 \\ x_1+y_1, & x_2+y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ x_1, & x_2, & 1 \\ y_1, & y_2, & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ x_1, & x_2, & 1 \\ x_1+y_1, & x_2+y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Чертежъ 2.



гдѣ X_1, X_2, X_3 суть текущія координаты. Очевидно, что обѣ прямыя проходятъ черезъ точку съ трилинейными координатами x_1+y_1, x_2+y_2, 1, т. е. черезъ точку z.

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи.

Если одна изъ точекъ x, y лежитъ на горизонтѣ, а другая нѣтъ, то точка z совпадаетъ съ той изъ нихъ, которая лежитъ на горизонтѣ.

Если обѣ точки x, y лежатъ на горизонтѣ, то обѣ прямыя ay и bx сольются съ нимъ, точка z будетъ лежать на горизонтѣ, но положеніе ея на этой прямой будетъ неопредѣленно. Оно можетъ сдѣлаться опредѣленнымъ, если извѣстенъ законъ, по которому точки x и y приближаются къ горизонту.

Если точки x и y лежатъ на одной прямой съ O, то данное нами построеніе непримѣнимо, ибо прямыя xb и ya, совпадаютъ съ Oxy. Это построеніе показываетъ намъ только, что точка z будетъ лежать на одной прямой съ точками x и y. Чтобы имѣть средство построить точку z въ этомъ случаѣ докажемъ слудующую теорему.

Теорема.—*Когда точки x и y перемѣщаются по двумъ прямымъ, которыя пересѣкаются на горизонтѣ, то точка z, изображающая сумму чиселъ x и y, будетъ перемѣщаться по прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ прямыхъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какія нибудь двѣ прямыя, которыя пересѣкаются на горизонтѣ и уравненіе которыхъ пусть будутъ:

$$u_1X_1+u_2X_2+\lambda u_3X_3=0,$$
$$u_1X_1+u_2X_2+\nu u_3X_3=0,$$

гдѣ λ и ν какія нибудь данныя числа. Если теперь точка x будетъ перемѣщаться по первой прямой, точка y по второй, такъ что

$$u_1x_1+u_2x_2+\lambda u_3=0$$
$$u_1y_1+u_2y_2+\nu u_3=0 \qquad (13)$$

то точка z будетъ всегда лежать на прямой

$$u_1X_1+u_2X_2+(\lambda+\nu)u_3X_3=0,$$

которая встрѣчаетъ горизонтъ въ точкѣ пересѣченія двухъ первыхъ, ибо изъ соотношеній (13) будемъ слѣдовать

$$u_1(x_1+y_1)+u_2(x_2+y_2)+u_3(\lambda+\nu)=0.$$

Пользуясь этой теоремой, нетрудно построить точку z', изображающую сумму $x'+y'$ въ томъ случаѣ, когда точки x', y' и O лежатъ на одной прямой. Беремъ произвольную точку K на горизонтѣ и проводимъ прямыя Kx' и Ky'. На нихъ беремъ двѣ точки x и y такъ, чтобы онѣ не лежали на одной прямой съ O, и строимъ точку z, изображающую сумму чиселъ x и y. Точка z' пересѣченія прямой $Ox'y'$ съ Kz и будетъ искомой. Ибо точка, изображающая сумму $x'+y'$ должна съ одной стороны лежать на прямой $Ox'y'$, какъ это слѣдуетъ изъ ранѣе даннаго построенія, а съ другой, на основаніи только что доказанной теоремы, на прямой Kz (см. чертежъ 2).

Умѣя геометрически строить сумму двухъ чиселъ, легко дать правило для построенія точки x, которая изображаетъ разность двухъ чиселъ z и y, $z—y$. Нужно опредѣлить точки a и b пересѣченія прямыхъ zy и Oy съ горизонтомъ и провести линіи Oa и zb; точка x будетъ пересѣченіемъ этихъ по-

слѣднихъ. Какъ слѣдуетъ измѣнить это построеніе въ томъ случаѣ, когда точки z, y и O будутъ лежать на одной прямой, ясно изъ предыдущаго.

Вмѣсто того, чтобы изображать комплексное число $x=x_1e_1+x_2e_2$ точкой x, проэктивныя координаты которой суть x_1 и x_2, мы можемъ изобразить его векторомъ Ox съ началомъ въ точкѣ O и концемъ въ точкѣ x. И тогда операція сложенія комплексныхъ чиселъ опредѣлитъ нѣкоторое построеніе по двумъ даннымъ векторамъ, имѣющимъ общее начало въ O, третьяго съ тѣмъ же началомъ. Векторъ Oz, изображающій сумму $x+y$ двухъ чиселъ x и y, заданныхъ векторами Ox и Oy, я назову проэктивной суммой векторовъ Ox и Oy.

Изъ предыдущаго ясно, что векторъ Oz — проэктивная сумма векторовъ Ox и Oy—есть діагональ четыреугольника, построеннаго на векторахъ Ox и Oy такъ, что противоположныя стороны его пересѣкаются на горизонтѣ.

Вытекающее отсюда правило для проэктивнаго сложенія векторовъ, я назову правиломъ четыреугольника. Едва ли нужно подробно разсматривать, какъ видоизмѣняется это правило въ томъ случаѣ, когда векторы Ox и Oy будутъ лежать на одной прямой.

Если та прямая линія, которую мы назвали горизонтомъ, удалится въ безконечность, то проэктивная сумма векторовъ Ox и Oy обратится въ геометрическую въ обыкновенномъ смыслѣ этого термина и правило четыреугольника —въ правило параллелограмма. Такъ какъ операція сложенія комплексныхъ чиселъ коммутативна и ассоціативна, то таковыми же свойствами будетъ обладать и проэктивное сложеніе векторовъ:

$$Ox+Oy=Oy+Ox,$$
$$(Ox+Oy)+Oz=Ox+(Oy+Oz),$$

гдѣ Ox, Oy, Oz какіе угодно векторы съ общимъ началомъ O и знакъ $+$ есть знакъ проэктивнаго сложенія.

Проэктивная разность векторовъ Oz и Oy есть векторъ Ox, складывая который проэктивно съ векторомъ Oy, получимъ векторъ Oz. Проэктивная разность векторовъ Oz и Oy есть сторона четыреугольника, у котораго противоположныя стороны пересѣкаются на горизонтѣ, діагональю служитъ векторъ Oz и одной изъ сторонъ векторъ Oy.

11. **Умноженіе и дѣленіе.** — Разсмотримъ теперь какой геометрическій смыслъ имѣетъ операція умноженія. Предполагая, что умноженіе характеризуется таблицей умноженія (р. 7)

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_1 e_1 &= a_{11} e_1 + b_{11} e_2, \\ e_1 e_2 &= a_{12} e_1 + b_{12} e_2, \\ e_2 e_1 &= a_{21} e_1 + b_{21} e_2, \\ e_2^2 = e_2 e_2 &= a_{22} e_1 + b_{22} e_2, \end{aligned}$$

мы будемъ изучать, какъ уже было упомянуто, только коммутативныя, ассоціативныя и опредѣленныя системы, т. е. системы, обладающія слѣдующими свойствами.

1. Коэффиціенты таблицы умноженія удовлетворяютъ соотношеніямъ (р. 9)

$$a_{12} = b_{21}, \quad b_{12} = b_{21}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{12}, & b_{11}, & a_{11} - b_{12} \\ a_{22}, & b_{12}, & a_{12} - b_{22} \end{matrix} \right\| = 0$$

2. Опредѣлитель

$$\Delta_x = \left| \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2, & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{matrix} \right|$$

и равный ему вслѣдствіе соотношеній $a_{12} = a_{21}$, $b_{12} = b_{21}$ опредѣлитель Δ_x' не обращаются для произвольныхъ x_1 и x_2 тожественно въ нуль.

Возьмемъ два комплексныхъ числа a и x и, перемноживъ ихъ, означимъ произведеніе черезъ y. Мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x_1 + (a_{21}a_1 + a_{22}a_2)x_2, \\ y_2 &= (b_{11}a_1 + b_{12}a_2)x_1 + (b_{21}a_1 + b_{22}a_2)x_2. \end{aligned}$$

Изобразимъ числа x и a точками на плоскости и, совмѣщая точку x послѣдовательно съ различными точками плоскости, будемъ строить соотвѣтствующія имъ точки y, изображающія числа ax. Тогда послѣднія равенства получатъ геометрическій смыслъ: такъ какъ они примутъ видъ

$$\begin{aligned} \sigma Y_1 &= (a_{11}a_1 + a_{12}a_2)X_1 + (a_{21}a_1 + a_{22}a_2)X_2 + \ * \\ \sigma Y_2 &= (b_{11}a_1 + b_{12}a_2)X_1 + (b_{21}a_1 + b_{22}a_2)X_2 + \ * \\ \sigma Y_3 &= \quad * \quad + \quad * \quad + X_3 \end{aligned}$$

если вмѣсто ангармоническихъ координатъ введемъ трилинейныя, то они опредѣлятъ нѣкоторое коллинеарное преобразованіе точекъ x въ точки y. Эта коллинеація будетъ измѣняться, если будемъ мѣнять параметры a_1 и a_2: слѣдовательно операція умноженія опредѣлитъ всего ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій. Частнымъ значеніямъ a_1 и a_2 будетъ соотвѣтствовать одна изъ нихъ, и точку, изображающую число a, я назову точкой характеризующей коллинеацію.

Извѣстно, что въ каждомъ коллинеарномъ преобразованіи существуютъ точки и прямыя, которыя не измѣняютъ своего положенія. Чтобы найти ихъ для преобразованій, опредѣляемыхъ операціей умноженія, мы изберемъ здѣсь пріемъ, который наиболѣе согласуется съ характеромъ принятаго нами изложенія, а именно методъ преобразованія къ новымъ единицамъ и, какъ его геометрическое толкованіе, методъ преобразованія координатъ. Въ § 9 было показано, что одна и таже точка изображаетъ произведеніе двухъ данныхъ чиселъ ax, какіе бы числа мы ни принимали за комплексныя единицы и, слѣдовательно, каковы бы ни были единичныя точки и оси координатъ, къ которымъ мы относимъ точки изображающія множителей и произведеніе. Отсюда заключаемъ, что коллинеарныя преобразованія, опредѣляемыя операціи умноженія, не будутъ зависѣть отъ выбора координатныхъ осей и комплексныхъ единицъ. Поэтому, желая опредѣлить положеніе точекъ и прямыхъ, не измѣняющихъ своего положенія, мы можемъ принять какія угодно числа за комплексныя единицы. Примемъ модуль умноженія μ и какое нибудь число $\omega=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2$, которое удовлетворяло бы условію $\mu_1\omega_2-\mu_2\omega_1\neq 0$, за новыя единицы и слѣдовательно точки μ и ω за новыя точки масштаба. Мы будемъ имѣть тогда такую таблицу умноженія

$$\mu^2=\mu,\ \mu\omega=\omega,\ \omega\mu=\mu$$
$$\omega^2=-\beta\mu+\alpha\omega=-x_1x_2\mu+(x_1+x_2)\omega, \qquad (14)$$

которая сведется къ одному характеристическому равенству

$$(\omega-x_1)(\omega-x_2)=0,$$

если модуль μ замѣнимъ обыкновенной единицей (§ 6). Если x_1', x_2'; a_1', a_2'; y_1', y_2' суть координаты точекъ x, a, y въ новой системѣ координатъ, то

$$x=x_1'+\omega x_2',\ a=a_1'+\omega a_2',\ y=y_1'+\omega y_2'.$$

Перемножая a и x и отбрасывая для сокращенія письма верхніе значки, получимъ

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 - \varkappa_1 \varkappa_2 a_2 x_2, \\ y_2 &= a_2 x_1 + (a_1 + a_2(\varkappa_1 + \varkappa_2)) x_2, \end{aligned} \qquad (15)$$

или, въ новыхъ трилинейныхъ координатахъ,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sigma[a_1 X_1 - \varkappa_1 \varkappa_2 a_2 X_2], \\ Y_2 &= \sigma[a_2 X_1 + (a_1 + a_2(\varkappa_1 + \varkappa_2)) X_2], \\ Y_3 &= \sigma X_3. \end{aligned} \qquad (16)$$

Итакъ мы должны найти прямыя и точки, не измѣняющія своего положенія въ коллинеарныхъ преобразованіяхъ, опредѣляемыхъ послѣдними равенствами. Для того, чтобы прямая

$$U_1 Y_1 + U_2 Y_2 + U_3 Y_3 = 0,$$

не измѣняла своего положенія, необходимо и достаточно, чтобы послѣ замѣны Y_1, Y_2, Y_3 ихъ выраженіями черезъ X_1, X_2, X_3 первая часть ея уравненія обратилась въ многочленъ $R(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3)$, гдѣ R нѣкоторая постоянная, и слѣдовательно координаты U_1, U_2, U_3 прямой, не измѣняющей своего положенія, должны удовлетворять соотношеніямъ

$$\begin{aligned} \sigma[a_1 U_1 + a_2 U_2] &= R U_1, \\ \sigma[-\varkappa_1 \varkappa_2 a_2 U_1 + (a_1 + a_2(\varkappa_1 + \varkappa_2)) U_2] &= R U_2, \\ \sigma U_3 &= R U_3. \end{aligned} \qquad (17)$$

Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ или $\sigma = R$, или $U_3 = 0$. Пусть $\sigma = R$; тогда первые два уравненія принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} (a_1 - 1) U_1 + a_2 U_2 &= 0, \\ -\varkappa_1 \varkappa_2 a_2 U_1 + (a_1 - 1 + a_2(\varkappa_1 + \varkappa_2)) U_2 &= 0. \end{aligned}$$

Если опредѣлитель ихъ

$$(a_1 - 1 + a_2 \varkappa_1)(a_1 - 1 + a_2 \varkappa_2)$$

не будетъ равняться нулю, то $U_1 = U_2 = 0$ и при $U_3 \neq 0$ мы будемъ имѣть одну прямую

$$X_3 = 0,$$

не измѣняющую своего положенія. Если же

$$a_1 + a_2 \varkappa_1 = 1,$$

или

$$a_1 + a_2 \varkappa_2 = 1,$$

то всѣ прямыя пучка

$$X_1 + \varkappa_1 X_2 + U_3 X_3 = 0 —$$

въ первомъ случаѣ и пучка

$$X_1 + \varkappa_2 X_2 + U_3 X_3 = 0 —$$

во второмъ не будутъ измѣнять своего положенія.

Пусть теперь $U_3 = 0$; тогда, исключая изъ первыхъ двухъ уравненій (17) величину R, найдемъ

$$a_2 (U_2 - \varkappa_1 U_1)(U_2 - \varkappa_2 U_1) = 0$$

Если $a_2 \neq 0$, то только двѣ прямыхъ—

$$X_1 + \varkappa_1 X_2 = 0 \text{ и } X_1 + \varkappa_2 X_2 = 0,$$

если $a_2 = 0$, то всѣ прямыя пучка $U_1 X_1 + U_2 X_2 = 0$ не будутъ мѣнять своего положенія.

Изъ предыдущихъ изслѣдованій мы видимъ, что три прямыя

$$X_3 (X_1 + \varkappa_1 X_2)(X_1 + \varkappa_2 X_2) = 0,$$

и только эти три не мѣняютъ своего положенія каковы бы ни были значенія параметровъ a_1 и a_2. Одна изъ этихъ прямыхъ

$$X_3 = 0 \qquad (f_3)$$

есть горизонтъ; двѣ другія (см. чертежъ 1)

$$X_1 + \varkappa_1 X_2 = 0 \qquad (f_2)$$

$$X_1 + \varkappa_2 X_2 = 0 \qquad (f_1)$$

проходятъ черезъ начало координатъ. Всѣ три я назову инваріантными прямыми, а точки ихъ пересѣченія I_1, I_2, I_3 инваріантными точками разсматриваемой системы координатъ. Инваріантныя прямыя f_1 и f_2 для чиселъ перваго класса ($\varkappa_1 \neq \varkappa_2$) различны, а для втораго—совпадаютъ; для гиперболической системы онѣ раздѣльны и дѣйствительны, для эллиптической—мнимы и сопряженны, для параболической совпадаютъ.

Вернемся теперь къ старымъ комплекснымъ единицамъ, e_1 и e_2, и старой системѣ координатъ. Уравненіе горизонта (f_3) въ старой системѣ очевидно будетъ $X_3=0$. Чтобы найти уравненія двухъ другихъ инваріантныхъ прямыхъ (f_1 и f_2), проходящихъ черезъ начало координатъ, составимъ изъ коэффиціентовъ новой таблицы умноженія (14) опредѣлитель такъ, какъ опредѣлитель Δ_x составленъ изъ коэффиціентовъ старой. Мы будемъ имѣть

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & -\varkappa_1\varkappa_2 x_2 \\ x_2 & , & x_1+(\varkappa_1+\varkappa_2)x_2 \end{vmatrix} = (x_1+\varkappa_1 x_2)(x_1+\varkappa_2 x_2)$$

Если x_1' и x_2' суть новыя координаты точки x, старыя координаты которой суть x_1 и x_2, такъ что

$$x_1e_1+x_2e_2=x_1'+\omega x_2',$$

то теорема II § 4 даетъ намъ равенство

$$\Delta_x=(x_1'+\varkappa_1x_2')(x_1'+\varkappa_2x_2')$$

изъ котораго, заключаемъ, что уравненіе пары инваріантныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, въ старыхъ ангармоническихъ координатахъ будетъ $\Delta_x=0$. Такимъ образомъ, резюмируя предыдущіе результаты, мы имѣемъ теорему.

Теорема I.—*Всѣ ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій, которыя опредѣляются операціей умноженія коммутативной, ассоціативной и опредѣленной системы комплексныхъ чиселъ, не измѣняютъ положенія трехъ прямыхъ линій: горизонта и двухъ прямыхъ*

$$\Delta_x=0,$$

проходящихъ черезъ начало координатъ, и только этихъ трехъ. Если система принадлежитъ къ первому классу, то прямыя $\Delta_x=0$ различны, если ко второму, то онѣ совпадаютъ. Для гиперболической системы прямыя $\Delta_x=0$ дѣйствительны и раздѣльны, для эллиптической—мнимы и сопряженны, для параболической—совпадаютъ.

Слѣдствіе.—Если въ равенствѣ $y=ax$, опредѣляющемъ коллинеацію, мы положимъ $x=\mu$, то получимъ $y=a$. Слѣдовательно точка a, характеризующая коллинеацію, есть та точка, въ которую эта коллинеація переводитъ точку μ, изображающую модуль операціи умноженія. Поэтому, пользуясь предыдущими изслѣдованіями, мы можемъ сказать, что

y, изображающая произведеніе ax, соотвѣтствуетъ точкѣ x въ коллинеарномъ преобразованіи, не измѣняющемъ положенія трехъ инваріантныхъ прямыхъ линій и переводящемъ точку μ въ точку a. Обратно, точка a, изображающая частное двухъ чиселъ $y:x$ соотвѣтствуетъ точкѣ μ въ коллинеарномъ преобразованіи, которое не измѣняетъ положенія трехъ инваріантныхъ прямыхъ и точку x переводитъ въ точку y.

Такимъ образомъ, когда намъ извѣстно положеніе инваріантныхъ прямыхъ и точки μ, то обѣ задачи: построить произведеніе двухъ чиселъ и частное отъ дѣленія одного числа на другое сводятся къ одной и той же задачѣ проэктивной геометріи: найти точку, въ которую переходитъ данная, при коллинеарномъ преобразованіи, заданномъ тремя прямыми, не измѣняющими своего положенія, и парой соотвѣтствующихъ точекъ.

Займемся теперь рѣшеніемъ обратнаго вопроса: опредѣлимъ всѣ коллинеарныя преобразованія, которыя не измѣняютъ положенія трехъ прямыхъ. Съ одной изъ этихъ прямыхъ совмѣстимъ основную прямую d_3 трилинейной системы координатъ, двѣ другія основныя прямыя проведемъ черезъ точку пересѣченія двухъ другихъ прямыхъ своего положенія не мѣняющихъ. Уравненія этихъ прямыхъ тогда будутъ

$$(X_1+\varkappa_1 X_2)(X_1+\varkappa_2 X_2)=0$$
$$X_3=0$$

гдѣ $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ нѣкоторыя положительныя, отрицательныя или обыкновенныя мнимыя числа. Пусть уравненія

$$\begin{aligned} Y_1&=c_{11}X_1+c_{12}X_2+c_{13}X_3,\\ Y_2&=c_{21}X_1+c_{22}X_2+c_{23}X_3,\\ Y_3&=c_{31}X_1+c_{32}X_2+c_{33}X_3 \end{aligned} \qquad (18)$$

опредѣляютъ искомыя коллинеаціи. Такъ какъ горизонтъ не мѣняетъ своего положенія, то мы должны имѣть $Y_3=0$ при $X_3=0$, слѣдовательно $c_{31}=c_{32}=0$. Такъ какъ начало координатъ остается неподвижнымъ, то $Y_1=Y_2=0$, если $X_1=X_2=0$, слѣдовательно $c_{13}=c_{23}=0$. Наконецъ, чтобы прямыя $X_1+\varkappa_1 X_2=0$ и $X_1+\varkappa_2 X_2=0$ не мѣняли своего положенія, мы должны имѣть соотношенія

$$c_{11}+\varkappa_1 c_{21}=R, \qquad c_{11}+\varkappa_2 c_{21}=R',$$
$$c_{12}+\varkappa_1 c_{22}=R\varkappa_1, \qquad c_{12}+\varkappa_2 c_{22}=R'\varkappa_2,$$

гдѣ R и R' нѣкоторыя постоянныя. Исключая ихъ, получимъ два уравненія

$$c_{12}+\varkappa_1(c_{22}-c_{11})-\varkappa_1^2 c_{21}=0,$$
$$c_{12}+\varkappa_2(c_{22}-c_{11})-\varkappa_2^2 c_{21}=0,$$

изъ которыхъ, полагая $c_{11}=a_1c_{33}$, $c_{21}=a_2c_{33}$, $c_{33}=\sigma$, имѣемъ

$$c_{12}=-\varkappa_1\varkappa_2 a_2\sigma,$$
$$c_{22}=[a_1+a_2(\varkappa_1+\varkappa_2)]\,\sigma,$$

и уравненія (18) обратятся въ ур. (16), къ которымъ приводитъ насъ операція умноженія комплексныхъ чиселъ вида $x_1+x_2\omega$ съ характеристическимъ равенствомъ $(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)=0$.

Такимъ образомъ существуетъ ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій, которыя не мѣняютъ положенія трехъ прямыхъ линій $X_3(X_1+\varkappa_1X_2)(X_1+\varkappa_2X_2)=0$. Всѣ они опредѣлятся операціей умноженія комплексныхъ чиселъ вида $x_1+x_2\omega$ съ характеристическимъ равенствомъ $(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)=0$.

Теорема II.—*Всѣ ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій, которыя не измѣняютъ положенія трехъ данныхъ прямыхъ линій опредѣлятся операціей умноженія надлежащимъ образомъ построенной коммутативной, ассоціативной и опредѣленной системы комплексныхъ чиселъ, если одну изъ данныхъ прямыхъ примемъ за горизонтъ, а точку пересѣченія двухъ другихъ—за начало координатъ* (*ср. теорему § 13*).

Слѣдствіе.—Если мы припомнимъ, что точка и прямая не измѣняютъ своего положенія въ коллинеарномъ преобразованіи, если первая лежитъ на пересѣченіи двухъ прямыхъ, а вторая соединяетъ двѣ точки, которыя остаются неподвижными въ этомъ преобразованіи, то придемъ къ такому заключенію.

Всѣ ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій, которыя опредѣляются операціей умноженія коммутативной, ассоціативной и опредѣленной системы, не измѣняютъ положенія трехъ и только трехъ инваріантныхъ точекъ этой системы.

Обратно всѣ ∞^2 коллинеарныхъ преобразованій, которыя не измѣняютъ положенія трехъ данныхъ точекъ опредѣлятся надлежащимъ образомъ построенной коммутативной, ассоціативной и опредѣленной системы, если одну изъ точекъ примемъ за начало координатъ, а прямую соединяющую двѣ другія за горизонтъ.

Теорема III.—*Если* $y=ax$, *то*

$$\begin{aligned} I_1(I_2I_3\mu x).\ I_1(I_2I_3\mu a) &= I_1(J_2I_3\mu y),\\ I_2(I_3I_1\mu x).\ I_2(I_3I_1\mu a) &= I_2(I_3I_1\mu y),\\ I_3(I_1I_2\mu x).\ I_3(I_1I_2\mu a) &= I_3(I_1I_2\mu y), \end{aligned} \tag{19}$$

т. е. ангармоническое отношеніе какихъ либо двухъ сторонъ инваріантнаго треугольника и двухъ прямыхъ соединяющую общую вершину этихъ сторонъ съ точками, изображающими модуль и произведеніе двухъ данныхъ чиселъ, равняется произведенію подобныхъ же отношеній для каждаго изъ множителей.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ коллинеаціи, опредѣляемой равенствомъ $y=ax$, лучи I_1I_2, I_1I_3 не измѣняютъ своего положенія, а лучи $I_1\mu$, I_1x переходитъ въ I_1a и I_1y, то основная теорема проэктивной геометріи даетъ намъ равенство

$$I_1(I_2I_3\mu x)=I_1(I_2I_3ay),$$

умноживъ которое на $I_1(I_2I_3\mu a)$, получаемъ первое изъ равенствъ (19). Также докажемъ и остальныя два.

Эту теорему можно доказать другимъ, аналитическимъ, способомъ. Если мы снова примемъ точки μ и ω за точки масштаба, то равенство $y=ax$ распадется на два (15), изъ которыхъ легко выводимъ соотношенія:

$$\begin{aligned} y_1+\varkappa_1y_2&=(a_1+\varkappa_1a_2)(x_1+\varkappa_1x_2),\\ y_1+\varkappa_2y_2&=(a_1+\varkappa_2a_2)(x_1+\varkappa_2x_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Замѣчая, что уравненія прямыхъ I_1I_2, I_1I_3, $I_1\mu$, I_1x соотвѣтственно суть

$$\begin{aligned} X_3&=0,\\ X_1+\varkappa_1X_2&=0,\\ X_1+\varkappa_1X_2-X_3&=0,\\ X_1+\varkappa_1X_2-(x_1+\varkappa_1x_2)X_3&=0, \end{aligned}$$

легко докажемъ, что

$$x_1+\varkappa_1x_2=I_1(I_2I_3\mu x).$$

Также обнаружимъ, что

$$\begin{aligned} x_1+\varkappa_2x_2&=I_2(I_1I_3\mu x),\\ x_1+\varkappa_2x_2&=I_3(I_1I_2\mu x)\\ x_1+\varkappa_1x_2& \end{aligned}$$

и изъ равенства (20) получимъ (19).

Эта теорема даетъ возможность изслѣдовать нѣкоторыя особенности операціи умноженія и коллинеаціи, ей опредѣляемой, въ слѣдующихъ частныхъ случаяхъ.

1. Когда точка a лежитъ на прямой μI_1, то $I_1(I_2I_3\mu a)=1$ и первое изъ равенствъ (19) обращается въ слѣдующее

$$I_1(I_2I_3\mu x)=I_1(I_2I_3\mu y),$$

изъ котораго заключаемъ: если точка a, характеризующая коллинеацію лежитъ на прямой соединяющей точку μ съ какой нибудь изъ инваріантныхъ точекъ, то прямыя, проходящія черезъ послѣднюю и всѣ точки противоположной ей инваріантной прямой не измѣнятъ своего положенія.

2. Предположимъ, что точка a лежитъ на инваріантной прямой f_1; тогда $I_2(I_1I_3\mu a)=I_3(I_1I_2\mu a)=0$ и равенства (19) даютъ намъ, если точка x не лежитъ въ точкѣ I_1

$$I_2(I_1I_3\mu y)=I_3(I_1I_2\mu y)=0$$
$$I_1(I_2I_3\mu a).\ I_1(I_2I_3\mu x)=I_1(I_2I_3\mu y).$$

Точка y очевидно лежитъ на прямой f_1, такъ что всѣ точки прямой:

$$I_1(I_2I_3\mu x)=const.,$$

проходящей черезъ I_1, перейдутъ въ одну и ту же точку y прямой f_1. Что же касается самой точки I_1, то положеніе ея послѣ преобразованія будетъ совершенно неопредѣленно, ибо когда x совпадаетъ съ I_1, то $I_2(I_1I_3\mu x)=\infty$, $I_3(I_1I_2\mu x)=\infty$, $I_1(I_2I_3\mu x)$ будетъ неопредѣленно и изъ равенствъ (19) слѣдуетъ, что всѣ три ангармоническихъ отношенія $I_1(I_2I_3\mu y)$, $I_2(I_3I_1\mu y)$, $I_3(I_1I_2\mu y)$ дѣлаются неопредѣленными. Итакъ, если точка, характеризующая коллинеацію, лежитъ на инваріантной прямой f_i ($i=1, 2, 3$), то всѣ точки прямой, проходящей черезъ I_i, переходятъ въ одну и ту же точку прямой f_i; точка же I_i послѣ преобразованія занимаетъ совершенно неопредѣленное положеніе. Отсюда заключаемъ обратно: если точки a и y лежатъ на инваріантной прямой f_i, то точка x изображающая частное y/a будетъ лежать на нѣкоторой опредѣленной прямой, которая проходитъ черезъ I_i ($i=1, 2, 3$), но положеніе ея на этой прямой будетъ неопредѣленно; если же точка a лежитъ на f_i, а точка y нѣтъ, то точка x совпадетъ съ I_i.

3. Пусть точка a совпадаетъ съ точкой I_1; тогда $I_2(I_1I_3\mu a)=\infty$, $I_3(I_1I_2\mu a)=\infty$, $I_1(I_2I_3\mu a)$ неопредѣленно, и

слѣдовательно, если x не лежитъ на прямой f_1, $I_3(I_1I_3\mu y)=\infty$, $I_3(I_1I_2\mu y)=\infty$ и $I_1(I_2I_3\mu y)$ неопредѣленно, такъ что y совпадаетъ съ I_1, т. е. всѣ точки не лежащія на прямой f_i переходятъ въ точку I_1. Если же точка x лежитъ на прямой f_1, то $I_2(I_1I_3\mu x)=0$, $I_3(I_1I_2\mu x)=0$, и всѣ три ангармоническія отношенія (19) будутъ неопредѣленны: положеніе точки y будетъ также неопредѣленно. Такимъ образомъ, когда точка a характеризующая коллинеацію совпадаетъ съ инваріантной точкой I_i, то всѣ точки плоскости, которыя не лежатъ на прямой f_i перейдутъ въ точку I_i, а точки прямой f_i займутъ совершенно неопредѣленное положеніе. Отсюда заключаемъ обратно: когда точка a совпадаетъ съ I_i, то точки, изображающія числа y/a лежатъ на f_i, если y не совпадаетъ съ I_i и будетъ совершенно неопредѣленно—въ противномъ случаѣ.

12. **Геометрическая сѣтка.**—Уже изслѣдованія предыдущаго параграфа обнаруживаютъ, что инваріантныя прямыя и точки—стороны и вершины инваріантнаго треугольника, а также точка μ, изображающая модуль операціи умноженія, имѣютъ важное значеніе для всей теоріи разсматриваемыхъ нами комплексныхъ чиселъ. Мы покажемъ теперь, что не только треугольникъ $I_1I_2I_3$ и точка μ сами тѣсно связаны со свойствами соотвѣтствующей имъ системы комплексныхъ чиселъ, но даютъ возможность построить цѣлый рядъ прямыхъ и точекъ, которыя также находятся въ замѣчательномъ отношеніи къ этой системѣ.

Теорема I.—*Если точки x и y находятся на различныхъ сторонахъ инваріантнаго треугольника, произведеніе $z=xy$ изобразится точкой пересѣченія этихъ сторонъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если x лежитъ на сторонѣ I_2I_3, а y на сторонѣ I_1I_3, то

$$I_2(I_3I_1\mu x)=\infty,\ I_1(I_2I_3\mu y)=0,$$

и теорема III предыдущаго параграфа даетъ намъ равенства

$$I_1(I_2I_3\mu z)=0,\ I_2(I_3I_1\mu z)=\infty,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что точка z совпадаетъ съ точкой I_3. Также докажется теорема и въ другихъ случаяхъ.

Теорема II.—*Произведеніе двухъ чиселъ x,y изобразится инваріантной точкой 1) если одна изъ точекъ x,y совпадаетъ съ инваріантной точкой, положеніе другой можетъ быть при этомъ произвольно, и 2) если точки x,y лежатъ на различныхъ сторонахъ инваріантнаго треугольника, которыя проходятъ черезъ разсматриваемую инваріантную точку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка z, изображающая произведеніе xy, совпадаетъ съ какой нибудь изъ инваріантныхъ точекъ, напримѣръ съ I_3; тогда

$$I_1(I_2I_3,\mu z)=0,\ I_2(I_3I_1,\mu z)=\infty,$$

слѣдовательно должно быть

$$I_1(I_2I_3,\mu x).\ I_1(I_2I_3,\mu y)=0,$$
$$I_2(I_3I_1,\mu x).\ I_2(I_3I_1,\mu y)=\infty.$$

Эти равенства возможны при слѣдующихъ условіяхъ.

1. $I_1(I_2I_3,\mu x)=0$, $I_2(I_3I_1,\mu x)=\infty$, т. е. когда точка x совпадаетъ съ I_3, положеніе точки y можетъ быть при этомъ совершенно произвольнымъ.

2. $I_1(I_2I_3,\mu x)=0$, $I_2(I_3I_1,\mu y)=\infty$, т. е. когда точка x лежитъ на сторонѣ I_1I_3, а точка y на сторонѣ I_2I_3.

Другія предположенія, при которыхъ имѣютъ мѣсто разсматриваемыя равенства, очевидно сведутся къ тому, что мы обмѣняемъ мѣстами точки x и y. Такимъ образомъ теорема доказана.

Такъ какъ точка I_3 изображаетъ число нуль, то изъ доказаннаго слѣдуетъ, что произведеніе $xy=0$ только въ двухъ случаяхъ: 1) когда хотя одинъ изъ множителей равняется нулю и 2) когда одна изъ точекъ x,y лежитъ на одной, а другая на другой изъ инваріантныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Замѣчу, что теоремы I и II, какъ это видно изъ слѣдствія 2 теоремы III предыдущаго параграфа, допускаютъ исключеніе: когда одинъ изъ множителей изобразится инваріантной точкой, а другой—точкой противоположной инваріантной прямой, произведеніе будетъ неопредѣленно.

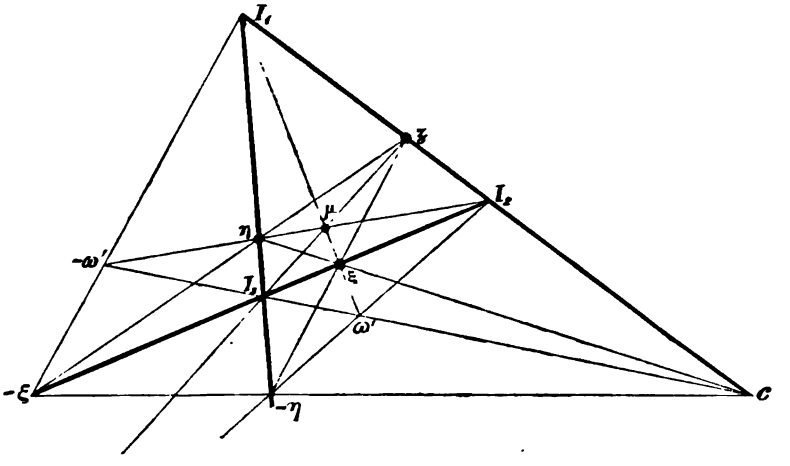
Теперь, пользуясь инваріантнымъ треугольникомъ $I_1I_2I_3$ и точкой μ, построимъ такъ называемую геометрическую сѣтку. Съ этою цѣлью, соединивъ точку μ съ I_1,I_2,I_3, мы строимъ сначала полный четыреугольникъ $\mu I_1I_2I_3$ и отмѣчаемъ его діагональныя точки ξ, γ, ζ. Докажемъ слѣдующее свойство сторонъ этого четыреугольника.

Теорема III.—*Если точки x и y лежатъ на одной и той же сторонѣ полнаго четыреугольника $I_1I_2I_3\mu$, то точка z, изображающая произведеніе xy, лежитъ на той же сторонѣ этого четыреугольника.*

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно разсмотрѣть только два случая, первый, когда точки x,y лежатъ на какой нибудь изъ инваріантныхъ прямыхъ, второй, когда онѣ лежатъ на какой нибудь изъ линій $\mu I_1, \mu I_2, \mu I_3$. Предположимъ сначала, что точки x,y лежатъ на сторонѣ μI_1. Тогда

$$I_1(I_2 I_3 . \mu x) = I_1(I_2 I_3 . \mu y) = 1,$$

Чертежъ 3.



и изъ теоремы III предыдущаго параграфа имѣемъ $I_1(I_2 I_3 . \mu z) = 1$; это равенство показываетъ, что точка z лежитъ на той же сторонѣ μI_1. Если x и y будутъ лежать на одной и той же инваріантной прямой, напримѣръ $I_2 I_3$, то $I_3(I_1 I_2 . \mu x) = I_3(I_1 I_2 . \mu y) = 0$ и значитъ $I_3(I_1 I_2 . \mu z) = 0$, откуда слѣдуетъ, что точка z лежитъ на той же прямой.

Теорема IV.—*Квадратъ числа, изображаемаго точкой пересѣченія какихъ либо сторонъ полнаго четыреугольника* $\mu I_1 I_2 I_3$, *изображается той же точкой.*

Въ самомъ дѣлѣ, по предыдущей теоремѣ, когда x лежитъ на какой нибудь сторонѣ полнаго четыреугольника, то и x^2 лежитъ на той же сторонѣ. Если, поэтому, точка x будетъ одновременно лежать на двухъ сторонахъ четыреугольника, т. е. будетъ въ пересѣченіи этихъ сторонъ, то и x^2 будетъ лежать на пересѣченіи тѣхъ же сторонъ, т. е. будетъ совпадать съ $x : x^2 = x$. Уравненіе $x^2 = x$ имѣетъ такимъ образомъ семь корней:

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ \mu$$

если черезъ I_1, I_2, I_3 означимъ числа, изображаемыя инваріантными точками. Можно показать, что другихъ корней уравненіе $x^3=x$ имѣть не можетъ.

Теорема V. — *Числа* ξ, η, ζ *обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ*

$$\xi^2=\xi,\quad \eta^2=\eta,\quad \zeta^2=\zeta,$$
$$\eta\zeta=I_1,\quad \zeta\xi=I_2,\quad \xi\eta=I_3.$$

Эта теорема есть слѣдствіе теоремъ I и IV. Замѣчу, что число $I_3=0$.

Продолжимъ построеніе геометрической сѣтки. Соединяя точки ξ,η,ζ прямыми, строимъ діагональный треугольникъ $\xi\eta\zeta$ и опредѣляемъ точки пересѣченія его сторонъ съ соотвѣтствующими сторонами инваріантнаго треугольника: $\xi\eta$ съ I_1I_2, $\eta\zeta$ съ I_2I_3, $\zeta\xi$ съ I_3I_1. Первая изъ этихъ точекъ, C, какъ видно изъ чертежа, будетъ гармонично сопряжена съ ζ относительно I_1 и I_2, вторая—съ ξ относительно I_2 и I_3, и наконецъ третья—съ η относительно I_1 и I_3; слѣдовательно вторая будетъ изображать число—ξ, а третья—η. Три точки—ξ,—η, C будутъ лежать, какъ извѣстно, на одной прямой—на полярѣ точки μ относительно треугольника $I_1I_2I_3$.

Проводя прямыя $I_1(-\xi)$, $I_2(-\eta)$, I_3C, нетрудно доказать, что три прямыя $I_1(-\xi)$, $I_2(-\eta)$, $\mu\zeta$ пересѣкаются въ одной точкѣ—μ и что общая точка пересѣченія прямыхъ I_3C, $I_1(-\xi)$, $\mu\eta$ будетъ—ω', если черезъ ω' означимъ точку пересѣченія прямыхъ $I_2(-\eta)$, I_3C, $\mu\xi$. Между числами ξ,η,μ,ω', какъ видно изъ чертежа, существуютъ такія соотношенія

$$\omega'=\xi-\eta,$$
$$\mu=\xi+\eta,$$

пользуясь которыми, мы можемъ найти два изъ чиселъ ξ,η,μ,ω', когда извѣстны два другихъ и легко докажемъ, что $\omega'^2=\mu$.

Относительно точекъ, лежащихъ на сторонахъ треугольника $\omega'(-\omega')(-\mu)$, докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема VI.—*Произведеніе чиселъ, изображаемыхъ точками, лежащими на одной и той же сторонѣ треугольника* $\omega'(-\omega')(-\mu)$, *изображается точкой, находящейся на линіи гармонично сопряженной съ этой стороной относительно двухъ сторонъ инваріантнаго треугольника.*

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, напримѣръ, что точки x и y лежатъ на прямой I_3C гармонично сопряженной съ $I_3\mu$ относительно сторонъ I_3I_1 и I_3I_2 инваріантнаго треугольника. Тогда $I_3(I_1I_2\mu x)=I_3(I_1I_2\mu y)=-1$ и значитъ $I_3(I_1I_2\mu z)=1$, откуда слѣдуетъ, что точка z находится на прямой $I_3\mu$. Также убѣдимся въ справедливости теоремы и въ другихъ случаяхъ.

Продолжая далѣе построеніе геометрической сѣтки, можно обнаружить, что числа, изображаемыя узлами этой сѣтки выразятся линейно черезъ ξ и τ, при чемъ коэффиціентами у ξ и η будутъ раціональныя числа, и что, обратно, всякое линейное относительно ξ и η выраженіе съ раціональными коэффиціентами будетъ изображаться нѣкоторымъ узломъ сѣтки. Отсюда, принимая во вниманіе теорему V, имѣемъ слѣдующую теорему.

Теорема VII.—*Квадраты и произведенія чиселъ, изображаемыхъ узлами геометрической сѣтки, построенной на инваріантномъ треугольникѣ и точкѣ μ, изображаются узлами той же сѣтки.*

Мы не входимъ въ подробное доказательство этой теоремы потому, что она, хотя и представляетъ интересъ сама по себѣ, однако не играетъ никакой роли въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Найдемъ теперь комплексныя числа, изображаемыя тѣми точками, которыя мы разсматривали. Построенная нами геометрическая сѣтка вполнѣ опредѣляется инваріантнымъ треугольникомъ и точкой μ. Поэтому мы найдемъ уравненія всѣхъ прямыхъ этой сѣтки, координаты точекъ ихъ пересѣченія и комплексныя числа, изображаемыя этими точками, если намъ будутъ извѣстны уравненія сторонъ инваріантнаго треугольника и число $\mu=\mu_1e_1+\mu_2e_2$. Какъ находится число μ было показано въ § 6. Чтобы имѣть уравненія инваріантныхъ прямыхъ, разлагаемъ квадратичную форму Δ_x на линейные множители: если

$$\Delta_x=(U_1x_1+U_2x_2)(V_1x_1+V_2x_2),$$

то уравненія инваріантныхъ прямыхъ I_3I_1, I_3I_2, проходящихъ черезъ начало координатъ, въ ангармоническихъ координатахъ будутъ

$$U_1x_1+U_2x_2=0, \qquad I_3I_1$$
$$V_1x_1+V_2x_2=0. \qquad I_3I_2$$

Такъ какъ ур. третьей инваріантной прямой, горизонта, есть $X_3=0$, то точки I_1, I_2, I_3 имѣютъ слѣдующія координаты

$$\begin{array}{lll} U_2, & -U_1, & 0 \quad I_1 \\ V_2, & -V_1, & 0 \quad I_2 \\ 0\ , & 0, & 1 \quad I_3 \end{array}$$

и уравненія прямыхъ μI_1, μI_2, μI_3, если положимъ

$$u_1=\frac{U_1}{U_1\mu_1+U_2\mu_2}\ ,\quad u_2=\frac{U_2}{U_1\mu_1+U_2\mu_2}\ , \qquad (21)$$
$$v_1=\frac{V_1}{V_1\mu_1+V_2\mu_2}\ ,\quad v_2=\frac{V_2}{V_1\mu_1+V_2\mu_2}\ ,$$

будутъ

$$\begin{array}{lll} u_1X_1+u_2X_2-X_3=0, & \quad \mu I_1 \\ v_1X_1+v_2X_2-X_3=0, & \quad \mu I_2 \\ \mu_2X_1-\mu_1X_2 \quad =0. & \quad \mu I_3 \end{array}$$

Вычисляя координаты точекъ ξ, η, ζ пересѣченія прямыхъ μI_1, μI_2, μI_3 съ инваріантными прямыми I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2 соотвѣтственно, будемъ имѣть

$$\begin{array}{lll} v_2, & -v_1, & 2\varkappa, \quad \xi \\ -u_2, & u_1, & 2\varkappa, \quad \eta \\ \mu_1, & \mu_2, & 0\ , \quad \zeta \end{array}$$

гдѣ

$$2\varkappa=u_1v_2-u_2v_1.$$

Такимъ образомъ

$$\xi=(v_2e_1-v_1e_2):2\varkappa,\ \eta=(u_1e_2-u_2e_1):2\varkappa,$$
$$\zeta=\infty(\mu_1e_1+\mu_2e_2), \qquad (22)$$
$$I_1=\infty(u_1e_2-u_2e_1),\ I_2=\infty(v_2e_1-v_1e_2),\ I_3=0.$$

Замѣчая, что каждая новая прямая сѣтки опредѣляется двумя уже ранѣе построенными точками, мы найдемъ послѣдовательно ур. какихъ угодно прямыхъ сѣтки и координаты точекъ ихъ пересѣченія. Мы опускаемъ дальнѣйшія вычисленія, такъ какъ для насъ кромѣ точекъ $\xi, \eta, \zeta, u, I_1, I_2, I_3$ имѣютъ важное значеніе еще только двѣ, изображаемыя числами

$$\omega'=\xi-\eta=\frac{1}{2\varkappa}[(u_2+v_2)e_1-(u_1+v_1)e_2],$$

$$i\omega'=i(\xi-\eta)=\frac{i}{2\varkappa}[(u_2+v_2)e_1-(u_1+v_1)e_2].$$

Всѣ теоремы этого параграфа были получены какъ слѣдствія изъ теоремы III параграфа предыдущаго. Но мы покажемъ въ слѣдующемъ §, что эта послѣдняя въ свою очередь можетъ быть выведена изъ теоремы V: теорема V имѣетъ слѣдовательно важное значеніе для всей теоріи разсматриваемыхъ нами комплексныхъ чиселъ и потому мы дадимъ теперь еще другое ея доказательство. Примемъ снова μ и ω за новыя единицы и точки μ и ω за точки масштаба. Въ новой системѣ координатъ ангармоническія координаты точки μ будутъ (1,0), а уравненія инваріантныхъ прямыхъ, какъ видѣли въ предыдущемъ параграфѣ,

$$X_1+\varkappa_1X_2=0,\ X_1+\varkappa_2X_2=0,\ X_3=0.$$

Поэтому, чтобы получить координаты точекъ $\xi, \eta, \zeta, I_1, I_2, I_3$ и выраженія для чиселъ, изображаемыхъ этими точками въ новой системѣ, стоитъ только въ полученныхъ выше формулахъ (22) замѣнить $U_1, U_2, V_1, V_2, \mu_1, \mu_2$ черезъ $1, \varkappa_1, 1, \varkappa_2, 1, 0$ соотвѣтственно. Тогда мы будемъ имѣть

$$u_1=1,\ u_2=\varkappa_1,\ v_1=1,\ v_2=\varkappa_2,\ 2\varkappa=\varkappa_2-\varkappa_1$$

$$\xi=\frac{1}{2\varkappa}(\varkappa_2-\omega),\ \eta=\frac{1}{2\varkappa}(\omega-\varkappa_1),\ \zeta=\infty(\zeta_1+0\omega) \qquad (22')$$

$$I_2=\infty(\varkappa_2-\omega),\ I_1=\infty(\omega-\varkappa_1),\ I_3=0.$$

Перемноживъ числа ξ, η, ζ, возвысивъ ихъ въ квадратъ и воспользовавшись затѣмъ характеристическимъ равенствомъ $(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)=0$, получимъ теорему V.

13. **Единицы ξ и η.**—Комплексныя числа ξ и η, благодаря простотѣ равенствъ

$$\xi^2=\xi,\ \eta^2=\eta,\ \xi\eta=0, \qquad (23)$$

которыя даетъ теорема V, весьма удобно принимать за комплексныя единицы. Такъ какъ точки ξ и η лежатъ на инваріантныхъ прямыхъ I_3I_2 и I_3I_1, и прямыя $I_1\xi$, $I_2\eta$ пересѣкаются въ точкѣ μ, то введеніе единицъ ξ и η соотвѣт-

ствуетъ тому, что мы принимаемъ инваріантный треугольникъ за основной треугольникъ и точку μ за единичную точку. Принимая во вниманіе, что изъ выраженій для чиселъ ξ и η слѣдуетъ

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1\xi + v_1\eta, \\ e_2 &= u_2\xi + v_2\eta, \end{aligned} \tag{24}$$

мы имѣемъ такое выраженіе для комплекснаго числа $x = x_1e_1 + x_2e_2$ въ единицахъ ξ и η

$$x_1e_1 + x_2e_2 = u_x\xi + v_x\eta,$$

гдѣ

$$\begin{aligned} u_x &= u_1x_1 + u_2x_2, \\ v_x &= v_1x_1 + v_2x_2, \end{aligned} \tag{25}$$

причемъ теорема § 9 даетъ намъ такія значенія для u_x и v_x:

$$\begin{aligned} u_x &= I_1(I_2I_3\mu x), \\ v_x &= I_2(I_1I_3\mu x), \\ v_x : u_x &= I_3(I_1I_2\mu x). \end{aligned} \tag{26}$$

Пользуясь равенствами (23), легко выводимъ слѣдующія формулы для произведенія, частнаго и квадратнаго корня:

$$xy = u_x.u_y\xi + v_x.v_y\eta, \tag{27}$$

$$x : y = (u_x : u_y)\xi + (v_x : v_y)\eta, \tag{28}$$

$$\sqrt{x} = \pm\sqrt{u_x}\xi \pm \sqrt{v_x}\eta. \tag{29}$$

Если означимъ черезъ $z = u_z\xi + v_z\eta$ произведеніе xy, то изъ первой формулы имѣемъ равенства

$$\begin{aligned} u_xu_y &= u_z, \\ v_xv_y &= v_z, \\ (v_x : u_x)(v_y : u_y) &= v_z : u_z, \end{aligned} \tag{27'}$$

которыя вслѣдствіе указаннаго нами значенія коэффиціентовъ при ξ и η, (26), тожественны съ равенствами (19) параграфа 11. Такимъ образомъ весьма важная теорема III параграфа 11 можетъ быть выведена какъ слѣдствіе изъ теоремы V предыдущаго параграфа.

Изъ формулы (29) видно, что $\sqrt{x}$ имѣетъ четыре значенія соотвѣтственно четыремъ возможнымъ комбинаціямъ знаковъ + и —. Зная точку a, которая изображаетъ одно изъ значеній $\sqrt{x}$, мы построимъ точки, изображающія остальныя три такимъ образомъ: соединивъ точку a съ I_1 и I_2, строимъ двѣ прямыя I_1t_1 и I_2t_2, изъ которыхъ первая была бы гармонично сопряжена съ I_1a относительно сторонъ I_1I_3, I_1I_2, а вторая—съ I_2a относительно сторонъ I_2I_3, I_2I_1 инваріантнаго треугольника. Четыре точки пересѣченія прямыхъ I_1t_1, I_1a съ прямыми I_2t_2, I_2a и будутъ изображать различныя значенія $\sqrt{x}$.

Замѣтимъ здѣсь, что вообще уравненіе

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0 \qquad (30)$$

гдѣ p_0, p_1, p_2, ... p_n суть нѣкоторыя комплексныя числа, имѣетъ n^2 корней. Ибо оно послѣ замѣны x черезъ $x_1e_1+x_2e_2$ распадается на два совокупныхъ уравненія степени n относительно x_1, x_2, уравненія, которыя, какъ извѣстно, имѣютъ n^2 системъ рѣшеній; каждая изъ этихъ системъ даетъ одинъ корень уравненія (30). Если мы введемъ комплексныя единицы ξ и η, то одно изъ уравненій, на которыя распадается (30), будетъ содержать только неизвѣстную u_x, а другое только неизвѣстную u_y, и рѣшеніе (30) значительно упростится: оно сведется къ рѣшенію двухъ независимыхъ другъ отъ друга уравненій n-ой степени съ обыкновенными числами.

Формулы (22), (23) и (24) даютъ возможность рѣшить задачу: построить систему комплексныхъ чиселъ, для которой данный треугольникъ былъ бы инваріантнымъ треугольникомъ и данная точка μ изображала бы модуль операціи умноженія.

Примемъ одну изъ сторонъ даннаго треугольника за горизонтъ и противоположную ей вершину за начало координатъ; оси координатъ и единичную точку возьмемъ какъ нибудь. Пусть уравненія сторонъ даннаго треугольника, проходящихъ черезъ начало, суть

$$U_1X_1+U_2X_2=0, \quad V_1X_1+V_2X_2=0,$$

а трилинейныя координаты точки μ:

$$\mu_1, \ \mu_2, \ 1.$$

Означая черезъ ξ и η точки пересѣченія прямыхъ μI_1 съ I_2I_3, μI_2 съ I_1I_3, черезъ e_1, e_2 точки масштаба, мы

будемъ имѣть между числами ξ,η,e_1,e_2, соотношенія (22) и (24), въ которыхъ u_1,u_2,v_1,v_2 опредѣляются по формуламъ (21). Такъ какъ данный треугольникъ $I_1I_2I_3$ для искомой системы долженъ быть инваріантнымъ и точка μ должна изображать модуль операціи умноженія, то квадраты и произведеніе чиселъ ξ и η должны опредѣляться равенствами (23), и потому

$$e_1^2=u_1^2\xi+v_1^2\eta,$$
$$e_1e_2=e_2e_1=u_1u_2\xi+v_1v_2\eta,$$
$$e_2^2=u_2^2\xi+v_2^2\eta.$$

Выразивъ теперь числа ξ и η черезъ e_1 и e_2 помощью формулъ (22), мы получимъ искомую таблицу умноженія § 11, въ которой

$$\begin{aligned} a_{11}&=(u_1^2v_2-u_2v_1^2):2\varkappa, & b_{11}&=u_1v_1(v_1-u_1):2\varkappa,\\ a_{12}=a_{21}&=u_2v_2(u_1-v_1):2\varkappa, & b_{12}=b_{21}&=u_1v_1(v_2-u_2):2\varkappa, \quad (31)\\ a_{22}&=u_2v_2(u_2-v_2):2\varkappa, & b_{22}&=(u_1v_2^2-u_2^2v_1):2\varkappa, \end{aligned}$$

$$2\varkappa=u_1v_2-u_2v_1.$$

Эти формулы рѣшаютъ вмѣстѣ съ тѣмъ задачу: выразить 8 величинъ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} связанныхъ между собой 4 ур. (8) черезъ 4 независимыхъ параметра.

Теорема. — *Если* $U_1X_1+U_2X_2=0$, $V_1X_1+V_2X_2=0$ *суть ур. инваріантныхъ прямыхъ и* μ_1, μ_2 *суть ангармоническія координаты точки, изображающей модуль операціи умноженія, то коэффиціенты таблицы умноженія найдутся по формуламъ* (*31*).

14. **Модуль и аргументъ.**—Введемъ теперь криволинейную систему координатъ, которая находится въ такомъ же отношеніи къ ангармоническимъ координатамъ, въ какомъ полярныя координаты—къ прямоугольнымъ Декартовымъ.

Съ этой цѣлью мы разсмотримъ двѣ функціи точки x. Одна изъ нихъ квадратичная функція координатъ x_1 и x_2:

$$\Delta_x\equiv(U_1x_1+U_2x_2)(V_1x_1+V_2x_2),$$

приравнивая которую нулю, мы получимъ уравненія инваріантныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Если мы означимъ координаты точки x въ системѣ (μ, ω) черезъ x_1' и x_2', то, какъ было показано въ § 11,

$$\Delta_x=(x_1'+\varkappa_1 x_2')(x_1'+\varkappa_2 x_2').$$

Съ другой стороны мы видѣли, что (§ 11)

$$x_1'+\varkappa_1 x_2'=I_1(I_2 I_3 \mu x),$$
$$x_1'+\varkappa_2 x_2'=I_2(I_1 I_3 \mu x),$$

слѣдовательно,

$$\Delta_x=I_1(I_2 I_3 \mu x).I_2(I_1 I_3 \mu x). \qquad (32)$$

Таково геометрическое значеніе функціи Δ_x.

Приравнивая Δ_x постоянной c_0, мы получаемъ уравненіе

$$\Delta_x=c_0,$$

или, въ трилинейныхъ координатахъ,

$$(U_1X_1+U_2X_2)(V_1X_1+V_2X_2)=c_0X_3^2,$$

которое опредѣлитъ нѣкоторое коническое сѣченіе. Легко обнаружить слѣдующія свойства этой кривой.

1. Она проходитъ черезъ инваріантныя точки горизонта $I_1(U_2,-U_1,0)$ и $I_2(V_2,-V_1,0)$.

2. Касательныя къ кривой въ инваріантныхъ точкахъ суть инваріантныя прямыя, ибо ур. касательной въ точкѣ a (a_1,a_2,a_3)

$$U_aV_x+V_aU_x=2c_0a_3$$

обращается въ ур. $U_x=0$, когда точка a совпадаетъ съ I_1 и ур. $V_x=0$, когда она совпадаетъ съ точкой I_2.

3. Изъ предыдущихъ двухъ свойствъ слѣдуетъ, что начало координатъ и горизонтъ суть сопряженные полюсъ и поляра относительно разсматриваемаго коническаго сѣченія.

Эти свойства совершенно не зависятъ отъ значенія параметра c_0 и слѣдовательно принадлежатъ всѣмъ коническимъ сѣченіемъ, которыя мы получимъ, измѣняя параметръ c_0. Къ числу этихъ коническихъ сѣченій принадлежитъ и пара инваріантныхъ прямыхъ, $\Delta_x=0$. Итакъ всѣ ∞^1 коническихъ сѣченій семейства $\Delta_x=c_0$, къ числу которыхъ принадлежитъ пара инваріантныхъ прямыхъ, проходятъ черезъ инваріантныя точки горизонта, касаясь въ нихъ между собой; начало координатъ и горизонтъ служатъ для нихъ общими сопряженными полюсомъ и полярой.

Замѣчу, что коническое сѣченіе $\Delta_x=1$ проходитъ черезъ точки μ и ω', а коническое сѣченіе $\Delta_x=-1$ черезъ $i\omega'$ (см. § 12).

Другую функцію точки x мы опредѣлимъ равенствомъ

$$2\varkappa u=\log I_3(I_2I_1,\mu x), \tag{33}$$

гдѣ $2\varkappa=u_1v_2-u_2v_1$. Функція u многозначна: ея значенія, соотвѣтствующія одной и той же точкѣ x, будутъ различаться на величину $n\pi i:\varkappa$, гдѣ n цѣлое число. Какъ мы выберемъ n укажемъ ниже. Изъ равенства (33) имѣемъ

$$I_3(I_2I_1,\mu x)=e^{2\varkappa u},$$

откуда видно, что при u постоянномъ и ангармоническое отношеніе $I_3(I_2I_1,\mu x)$ будетъ постоянно; слѣдовательно семейство кривыхъ $u=c_0$ образуетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Корень квадратный изъ Δ_x, $\sqrt{\Delta_x}$, среднее геометрическое между ангармоническими отношеніями $I_1(I_2I_3,\mu x)$ и $I_2(I_1I_3,\mu x)$, я приму за одну изъ координатъ точки x и назову ее модулемъ точки x и числа $x=x_1e_1+x_2e_2$, изображаемаго этой точкой. Что касается знака корня, то мы опредѣлимъ его ниже.

Величину u я приму за другую координату точки x и назову ее аргументомъ этой точки и числа $x=x_1e_1+x_2e_2$.

Координаты $\sqrt{\Delta_x}$ и u я назову проэктивно-полярными координатами. Изъ сказаннаго относительно кривыхъ $\Delta_x=c_0$ и $u=c_0$ видно, что положеніе точки въ этой системѣ будетъ опредѣляться пересѣченіемъ прямой, проходящей черезъ начало координатъ, и коническаго сѣченія, касающагося въ инваріантныхъ точкахъ инваріантныхъ прямыхъ.

Найдемъ теперь зависимость между ангармоническими и проэктивно-полярными координатами. Воспользовавшись формулами (26), мы будемъ имѣть такія уравненія для опредѣленія Δ_x и u:

$$\begin{aligned}\Delta_x&=u_x.\,v_x,\\ 2\varkappa u&=\log(u_x:v_x)\end{aligned} \tag{34}$$

по даннымъ x_1 и x_2, рѣшивъ которыя относительно u_x и v_x, получимъ формулы

$$\begin{aligned}u_x&=\sqrt{\Delta_x}e^{\varkappa u},\\ v_x&=\sqrt{\Delta_x}e^{-\varkappa u},\end{aligned} \tag{35}$$

для обратнаго перехода отъ Δ_x и u къ x_1 и x_2. Двѣ послѣднія, изящныя по своей простотѣ и симметріи, формулы служатъ основными въ теоріи проэктивно-полярныхъ координатъ. Для теоріи этихъ координатъ безразлично, какъ будетъ нами выбраны знакъ модуля, $\sqrt{\Delta_x}$, и число n, входящее въ выраженіе u, лишь бы только послѣдніе два равенства были справедливы не только по абсолютной величинѣ, но и по знаку. Сообразуясь съ этимъ замѣчаніемъ, мы и будемъ выбирать знакъ $\sqrt{\Delta_x}$ и число n (см. § 18).

Рѣшая уравн. (35) относительно x_1 и x_2, получаемъ:

$$x_1=\frac{\sqrt{\Delta_x}}{2\varkappa}(v_2e^{\varkappa u}-u_2e^{-\varkappa u}),\quad x_2=\frac{\sqrt{\Delta_x}}{2\varkappa}(u_1e^{-\varkappa u}-v_1e^{\varkappa u}),$$

а введя комплексныя единицы ξ и η, имѣемъ для числа x выраженіе:

$$x=\sqrt{\Delta_x}(e^{\varkappa u}\xi+e^{-\varkappa u}\eta).$$

Означимъ черезъ v аргументъ числа $y=y_1e_1+y_2e_2$. Комбинація формулъ

$$u_y=\sqrt{\Delta_y}e^{\varkappa v},\ v_y=\sqrt{\Delta_y}e^{-\varkappa v} \tag{35'}$$

подобныхъ (35) съ этими послѣдними даетъ намъ равенства

$$\begin{aligned}u_xv_y-u_yv_x&=2\sqrt{\Delta_x}\sqrt{\Delta_y}\sinh\varkappa(u-v),\\ u_xv_y+u_yv_x&=2\sqrt{\Delta_x}\sqrt{\Delta_y}\cosh\varkappa(u-v);\end{aligned} \tag{36}$$

но
$$u_xv_y-u_yv_x=2\varkappa(x_1y_2-x_2y_1)$$

и потому

$$x_1y_2-x_2y_1=\sqrt{\Delta_x}\sqrt{\Delta_y}\frac{1}{\varkappa}\sinh\varkappa(u-v). \tag{37}$$

Формулы (36) и (37) аналогичны съ формулами для площади параллелограмма построеннаго на двухъ векторахъ и такъ называемаго геометрическаго произведенія векторовъ, ибо $u_xv_y+u_yv_x$ есть билинейная форма полярная по отношенію къ Δ_x.

Взявъ третье число z, означивъ черезъ w его аргументъ, составимъ равенства

$$\begin{aligned}y_1z_2-y_2z_1&=\sqrt{\Delta_y}\sqrt{\Delta_z}\sinh\varkappa(v-w),\\ z_1x_2-z_2x_1&=\sqrt{\Delta_z}\sqrt{\Delta_x}\sinh\varkappa(w-u),\end{aligned}$$

подобныя (37) и предположимъ, что $z=x+y$, такъ что $z_1=x_1+y_1$, $z_2=x_2+y_2$; тогда

$$y_1z_2-y_2z_1=y_1x_2-y_2x_1=z_1x_2-z_2x_1,$$

и слѣдовательно

$$\sqrt{\Delta_x}\sqrt{\Delta_y}\sinh\varkappa(v-u)=\sqrt{\Delta_y}\sqrt{\Delta_z}\sinh\varkappa(v-w)=$$
$$=\sqrt{\Delta_z}\sqrt{\Delta_x}\sinh\varkappa(w-u);$$

отсюда

$$\frac{\sqrt{\Delta_x}}{\sinh\varkappa(v-w)}=\frac{\sqrt{\Delta_y}}{\sinh\varkappa(w-u)}=\frac{\sqrt{\Delta_z}}{\sinh\varkappa(v-u)}. \qquad (38)$$

Кромѣ того $u_z=u_x+u_y$, $v_z=v_x+v_y$; поэтому

$$\Delta_z=u_zv_z=u_xv_x+u_xv_y+v_xu_y+u_yv_y,$$

или, принимая во вниманіе формулы (35) и (35′),

$$\Delta_z=\Delta_x+\Delta_y+2\sqrt{\Delta_x}\sqrt{\Delta_y}\cosh\varkappa(u-v). \qquad (39)$$

Аналогія формулъ (38) и (39) съ извѣстными формулами для длины діагонали и угловъ, образуемыхъ ею со сторонами параллелограмма, въ зависимости отъ длины сторонъ параллелограмма и угла между ними очевидна. Формулы (38) и (39) можно вывести иначе изъ равенствъ

$$\sqrt{\Delta_z}e^{\varkappa w}=\sqrt{\Delta_x}e^{\varkappa u}+\sqrt{\Delta_y}e^{\varkappa v},$$
$$\sqrt{\Delta_x}e^{-\varkappa w}=\sqrt{\Delta_x}e^{-\varkappa u}+\sqrt{\Delta_y}e^{-\varkappa v}. \qquad (40)$$

Предположимъ, что $z=xy$; воспользовавшись равенствами (27′), мы будемъ имѣть

$$\Delta_z=\Delta_x\Delta_y, \qquad (41)$$
$$w=u+v, \qquad (42)$$

т. е. *модуль произведенія равняется произведенію модулей, аргументъ произведенія равняется суммѣ аргументовъ.*

Замѣчу, что во всѣхъ формулахъ этого параграфа кромѣ (41) и (42) мы можемъ Δ_x замѣнить какой угодно квадратичной функціей R_x отъ x_1 и x_2, если только точку u возьмемъ гдѣ нибудь на коническомъ сѣченіи $R_x=1$. Что же

касается до формулъ (41) и (42), то онѣ имѣютъ мѣсто только при условіи $R_x \equiv \Delta_x$.

15. **Функція отъ комплекснаго перемѣннаго.** — Комплексное число

$$z = z_1 e_1 + z_2 e_2,$$

у котораго коэффиціенты z_1 и z_2 суть нѣкоторыя функціи коэффиціентовъ x_1 и x_2 комплекснаго перемѣннаго $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$:

$$z_1 = z_1(x_1, x_2), \quad z_2 = z_2(x_1, x_2),$$

я буду называть функціей комплекснаго перемѣннаго x, когда $z_1(x_1, x_2)$ и $z_2(x_1, x_2)$ имѣютъ такой видъ, что отношеніе приращенія z

$$dz = dz_1 e_1 + dz_2 e_2$$

къ соотвѣтствующему приращенію перемѣннаго независимаго

$$dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2$$

не будетъ зависѣть отъ отношенія dx_1 / dx_2. Раскрыть видъ, который должны имѣть функціи z_1 и z_2 для того, чтобы z удовлетворяло этому условію, можно различными способами. Проще всего мы достигнемъ цѣли, если въ выраженіи z и x введемъ комплексныя единицы ξ и η; мы получимъ

$$z = u_x \xi + v_x \eta,$$
$$x = u_x \xi + v_x \eta,$$

гдѣ
$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2, \quad u_x = u_1 z_1 + u_2 z_2,$$
$$v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2, \quad v_x = v_1 z_1 + v_2 z_2 .$$

Примемъ u_x и v_x за независимыя перемѣнныя вмѣсто x_1 и x_2; тогда

$$z = \varphi(u_x, v_x)\xi + \psi(u_x, v_x)\eta,$$
$$dz = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_x} du_x + \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} dv_x\right)\xi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_x} du_x + \frac{\partial \psi}{\partial v_x} dv_x\right)\eta,$$
$$dx = du_x \xi + dv_x \eta,$$

и, наконецъ, если воспользуемся формулой (28)

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \cdot \frac{dv_x}{du_x}\right)\xi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_x} \cdot \frac{du_x}{dv_x} + \frac{\partial \psi}{\partial v_x}\right)\eta. \qquad (43)$$

Послѣдняя формула показываетъ, что отношеніе dz/dx не будетъ зависѣть отъ отношенія dx_1/dx_2 только при условіи

$$\frac{d\varphi}{dv_x}=\frac{d\psi}{du_x}=0,$$

т. е. тогда, когда функція φ будетъ содержать только u_x, а ψ—только v_x:

$$\varphi(u_x,v_x)\equiv\varphi(u_x),$$
$$\psi(u_x,v_x)\equiv\psi(v_x).$$

Итакъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. — *Для того, чтобы комплексное перемѣнное* $z=z_1e_1+z_2e_2$ *было функціей комплекснаго перемѣннаго* $x=x_1e_1+x_2e_2$, *функціи* z_1 *и* z_2 *отъ* x_1 *и* x_2 *должны опредѣляться равенствами*

$$u_z=u_1z_1+u_2z_2=\varphi(u_x),$$
$$v_z=v_1z_1+v_2z_2=\psi(v_x), \qquad (44)$$

въ которыхъ функціи φ *и* ψ *могутъ быть совершенно произвольны.*

Изъ этой теоремы слѣдуетъ.

1. Дифференцируя уравн. (44) по x_1 и x_2, имѣемъ

$$u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=\varphi'(u_x).u_1\,,\quad v_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=\psi'(u_x).v_1\,,$$
$$u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+u_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}=\varphi'(u_x).u_2\,,\quad v_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}=\psi'(v_x).v_2\,. \qquad (45)$$

Исключивъ отсюда производныя φ' и ψ', получимъ

$$u_2\left(u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)=u_1\left(u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+u_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right),$$
$$v_2\left(v_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)=v_1\left(v_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right);$$

или
$$u_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+u_1u_2\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}-\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)-u_2^2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=0,$$
$$v_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+v_1v_2\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}-\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)-v_2^2\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=0 \qquad (46)$$

—дифференціальныя уравненія, которыми будутъ связаны функціи z_1 и z_2, если z есть функція отъ x. Обратно, когда z_1 и z_2 удовлетворяютъ послѣднимъ двумъ уравненіямъ, то z будетъ функціей отъ x, ибо изъ нихъ слѣдуютъ уравненія (44), что доказать нетрудно, если вмѣсто перемѣнныхъ x_1 и x_2 введемъ u_x и v_x.

2. Исключивъ изъ уравн. (46) функцію z_2, найдемъ, что z_1 будетъ удовлетворять дифф. уравн. 2-го порядка

$$u_2v_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^{\,2}}-(u_1v_2+u_2v_1)\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1\partial x_2}+u_1v_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_2^{\,2}}=0, \qquad (47)$$

которое, замѣчая, что ур. $\Delta_x=0$ и $(u_1x_1+u_2x_2)(v_1x_1+v_2x_2)=0$ тожественны, мы можемъ представить символически такимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\dfrac{\partial}{\partial x_2}-a_{12}\dfrac{\partial}{\partial x_1}, & a_{21}\dfrac{\partial}{\partial x_2}-a_{22}\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ b_{11}\dfrac{\partial}{\partial x_2}-b_{12}\dfrac{\partial}{\partial x_1}, & b_{21}\dfrac{\partial}{\partial x_2}-b_{22}\dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{vmatrix} z_1=0. \qquad (48)$$

Тому же уравненію будетъ удовлетворять и z_2.

3. Если z есть функція отъ x, то обратно x есть функція отъ z.

4. Если y есть функція отъ x, z—функція отъ y, то z будетъ функціей отъ x.

5. Если z есть функція отъ x, то формула (43) даетъ намъ

$$\frac{dz}{dx}=\varphi'(u_x)\xi+\psi'(v_x)\eta, \qquad (49)$$

откуда видно, что dz/dx есть также функція отъ x—это производная отъ z по x. Пользуясь равенствами (45), мы можемъ представить производную въ другихъ формахъ.

6. Интеграломъ функціи z отъ x я назову такую перемѣнную y, что

$$\frac{dy}{dx}=z=\varphi(u_x)\xi+\psi(v_x)\eta.$$

Такъ какъ z не зависитъ отъ dx_1/dx_2, то изъ опредѣленія функціи комплекснаго перемѣннаго слѣдуетъ, что y будетъ функціей отъ x:

$$y=\varphi_1(u_x)\xi+\psi_1(v_x)\eta,$$

и изъ условій $\varphi_1'(u_x)=\varphi(u_x)$, $\psi_1'(v_x)=\psi(v_x)$, будемъ имѣть

$$y=\int z dx=\xi\int\varphi(u_x)du_x+\eta\int\psi(v_x)dv_x+C,$$

гдѣ $$C=C_1e_1+C_2e_2$$

произвольная постоянная.

7. Комплексное число $z=z_1e_1+z_2e_2$, коэффиціенты z_1 и z_2 котораго зависятъ отъ коэффиціентовъ $x_1,x_2,y_1,y_2,\ldots$ перемѣнныхъ $x,y,\ldots$, мы назовемъ функціей комплексныхъ перемѣнныхъ $x,y,\ldots$ только въ томъ случаѣ, когда z будетъ функціей каждаго изъ перемѣнныхъ $x,y,\ldots$. Изъ основной теоремы этого параграфа видно, что для соблюденія этого условія z_1 и z_2 должны опредѣляться изъ уравненій

$$u_x=u_1z_1+u_2z_2=\varphi(u_x,u_y,\ldots),$$
$$v_x=v_1z_1+v_2z_2=\psi(v_x,v_y,\ldots),$$

въ которыхъ функціи φ и ψ могутъ быть выбраны совершенно произвольно. Отсюда слѣдуетъ: если z будетъ функціей двухъ комплексныхъ перемѣнныхъ x и y, то перемѣнная y, опредѣляемая ур. $z=0$, будетъ функціей отъ x.

16. **Преобразованія, опредѣляемыя функціей комплекснаго перемѣннаго.**—Функція z комплекснаго перемѣннаго x опредѣляетъ двѣ функціи

$$z_1=z_1(x_1,x_2),\ z_2=z_2(x_1,x_2) \qquad (50)$$

перемѣнныхъ x_1,x_2 и устанавливаетъ такимъ образомъ нѣкоторое преобразованіе плоскости. Разсмотримъ какими свойствами обладаетъ это преобразованіе. Такъ, какъ по теоремѣ предыдущаго параграфа $u_x=\varphi(u_x),v_x=\psi(v_x)$, то всѣ точки прямой

$$u_x=c_0,$$

проходящей черезъ инваріантную точку I_1, переходятъ на прямую

$$u_x=\varphi(c_0),$$

которая проходитъ черезъ ту-же инваріантную точку I_1: прямая пучка съ центромъ I_1 преобразуется въ прямую того-же самаго пучка. Точно также изъ уравненія $v_x=\psi(v_x)$

слѣдуетъ, что прямыя, которыя проходятъ черезъ точку I_2, преобразуются снова въ прямыя, проходящія черезъ ту же точку. Такимъ образомъ два пучка плоскости, центрами которымъ служатъ инваріантныя точки горизонта, не измѣняютъ своего положенія. Эти два пучка я назову инваріантными пучками разсматриваемой системы комплексныхъ чиселъ.

Въ точкѣ I_1 u_x неопредѣленно, а $v_x = \infty$, въ точкѣ I_2 v_x неопредѣленно и $u_x=\infty$. Поэтому точка I_1 преобразуется въ прямую

$$v_z=\psi(\infty),$$

а I_2 въ прямую

$$u_z=\varphi(\infty).$$

Всѣ другія точки горизонта ($u_x=\infty$, $v_x=\infty$) вообще переходятъ въ одну и ту же точку, координаты которой z_1 и z_2 опредѣлятся изъ предыдущихъ двухъ уравненій. Если же $\varphi(\infty)=\infty$ и $\psi(\infty)=\infty$, то всѣ точки горизонта переходятъ снова въ точки горизонта: горизонтъ не измѣняетъ своего положенія.

Предположимъ, обратно, что мы имѣемъ нѣкоторое преобразованіе (50), которое не измѣняетъ пучковъ съ центрами I_1 и I_2. Чтобы пучекъ съ центромъ I_1 не измѣнялъ своего положенія, u_z должно оставаться постояннымъ пока u_x постоянно и измѣняться съ измѣненіемъ u_x: u_z должно быть функціей отъ u_x, $u_z=\varphi(u_x)$. Также условіе неизмѣняемости пучка съ центромъ I_2 приводитъ насъ къ ур. $v_z=\psi(v_x)$. Слѣдовательно перемѣнная $z=z_1e_1+z_2e_2$ будетъ функціей перемѣннаго $x=x_1e_1+x_2e_2$. Въ § 11 было показано, что выбирая надлежащимъ образомъ основной треугольникъ, мы всегда можемъ построить такую систему комплексныхъ чиселъ съ модулемъ операціи умноженія, что двѣ произвольно данныхъ точки плоскости будутъ инваріантными точками горизонта этой системы. Поэтому предыдущіе результаты мы можемъ резюмировать слѣдующей теоремой.

Теорема I.—*Преобразованіе плоскости, опредѣляемое функціей комплекснаго перемѣннаго, не измѣняетъ положенія двухъ прямолинейныхъ пучковъ, центрами которымъ служатъ инваріантныя точки горизонта.*

Обратно, если мы имѣемъ нѣкоторое преобразованіе плоскости, которое не измѣняетъ положенія двухъ прямолинейныхъ пучковъ, то всегда можно построить такую систему комплексныхъ чиселъ съ модулемъ операціи умноженія, что, принявъ прямую, соединяющую центры пучковъ за горизонтъ, мы можемъ характеризовать данное преобразованіе нѣкоторой функціей комплекснаго перемѣннаго.

Слѣдствіе. — Если для геометрическаго представленія комплексныхъ чиселъ вида $x_1+x_2\omega$ съ характеристическимъ равенствомъ $\omega^2=-1$ мы возьмемъ Декартову прямоугольную систему координатъ на Эвклидовой плоскости, то горизонтомъ будетъ служить безконечно удаленная прямая, инваріантными точками горизонта будутъ воображаемыя круговыя точки, а инваріантными пучками—пучки изотропныхъ прямыхъ. Функціи комплекснаго перемѣннаго опредѣлятъ такія преобразованія плоскости, при которыхъ изотропныя прямыя переходятъ въ изотропныя же прямыя.

Разсмотримъ подробнѣе преобразованія, опредѣляемыя нѣкоторыми функціями.

Пусть

$$z=ax+b.$$

Очевидно, что z_1 и z_2 будутъ линейными функціями отъ x_1 и x_2. Слѣдовательно трилинейныя координаты точки $z(Z_1,Z_2,Z_3)$ будутъ линейными и однородными функціями трилинейныхъ координатъ точки $x(X_1,X_2,X_3)$, и данная функція опредѣлитъ коллинеарное преобразованіе. Преобразованіе не измѣнитъ положенія точекъ I_1 и I_2, ибо по основной теоремѣ прямыя I_1x,I_2x перейдутъ въ прямыя I_1z,I_2z. Съ другой стороны, если изъ ∞^8 коллинеарныхъ преобразованій плоскости мы отберемъ тѣ, которыя не измѣняютъ положенія точекъ I_1 и I_2 и стало быть удовлетворяютъ четыремъ условіямъ, то будемъ имѣть только ∞^4 коллинеарныхъ преобразованій и, слѣдовательно, надлежащимъ выборомъ чиселъ a,b мы всегда можемъ достигнуть того, что произвольно взятое коллинеарное преобразованіе, не измѣняющее положенія инваріантныхъ точекъ горизонта, опредѣлится нѣкоторой линейной функціей отъ x. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема II.—*Линейныя функціи опредѣляютъ всѣ коллинеарныя преобразованія, которыя не измѣняютъ положенія двухъ инваріантныхъ точекъ горизонта.*

Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ этой теоремы.

Предположимъ, что z есть нѣкоторая функція отъ x, такъ что z_1 и z_2 опредѣляются ур. (44). Если черезъ x' означимъ значенія перемѣннаго независимаго безконечно близкія къ нѣкоторому опредѣленному его значенію x, черезъ z' соотвѣтствующія значенія функціи, которыя будутъ вообще весьма близки къ z, то мы можемъ положить, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ,

$$z'-z=dz,\ x'-x=dx,$$

и ур. (49) дастъ намъ

$$z'-z=a(x'-x),$$

гдѣ $$a=\varphi'(u_x)\xi+\psi'(v_x)\eta.$$

Такимъ образомъ z' будетъ линейной функціей отъ x', и безконечно малая область вокругъ точки x преобразуется въ безконечно малую область вокругъ точки z коллинеарно. Припоминая, что прямыя xI_1 и xI_2 всегда преобразуются въ прямыя zI_1 и zI_2, мы приходимъ къ такой теоремѣ.

Теорема III.—*Если z есть функція комплекснаго перемѣннаго x, то безконечно малая область вокругъ точки x преобразуется въ безконечно малую область вокругъ точки z коллинеарно и при томъ такъ, что треугольникъ I_1xI_2 переходитъ въ треугольникъ I_1zI_2.*

Изъ этой теоремы слѣдуетъ.

1. Проведемъ черезъ точку x двѣ кривыя линіи α_1 и α_2. Онѣ преобразуются въ двѣ кривыя линіи β_1 и β_2, проходящія черезъ точку z. Такъ какъ безконечно малая область вокругъ точки x преобразуется въ безконечно малую область вокругъ точки z коллинеарно и прямыя xI_1, xI_2 преобразуются въ прямыя zI_1, zI_2, то ангармоническое отношеніе касательныхъ къ кривымъ α_1, α_2 въ точкѣ x и прямыхъ xI_1, xI_2 должно равняться ангармоническому отношенію касательныхъ кривымъ β_1, β_2 въ точкѣ z и прямыхъ zI_1, zI_2.

2. Приравнивая функціи $z_1(x_1,x_2)$ и $z_2(x_1,x_2)$ постояннымъ, мы получимъ два уравненія

$$z_1(x_1,x_2)=c_1,\ z_2(x_1,x_2)=c_2,$$

которыя опредѣлятъ два семейства кривыхъ линій. Кривыя перваго семейства преобразуются въ прямыя $z_1=c_1$, проходящія черезъ координатную точку O_2, кривыя втораго семейства—въ прямыя $z_2=c_2$ пучка съ центромъ O_1. Проведемъ

черезъ точку x двѣ кривыя, изъ которыхъ одна принадлежала бы къ первому семейству, а другая ко второму, и построимъ касательныя α_1 и α_2 въ точкѣ x къ этимъ кривымъ. Послѣ преобразованія разсматриваемыя кривыя перейдутъ въ прямыя zO_2 и zO_1, прямыя xI_1 и xI_2—въ прямыя zI_1 и zI_2, а потому ангармоническое отношеніе лучей $\alpha_1,\alpha_2,xI_1,xI_2$ будетъ равняться ангармоническому отношенію

$$z(O_2O_1I_1I_2)=(O_2O_1I_1I_2)$$

и, слѣдовательно, не будетъ зависѣть не только отъ положенія точки x, но и отъ вида функціи z. Итакъ ангармоническое отношеніе касательныхъ къ кривымъ $z_1(x_1,x_2)=c_1$, $z_2(x_1,x_2)=c_2$ въ точкѣ x ихъ пересѣченія и лучей xI_1,xI_2 не зависитъ ни отъ значенія постоянныхъ c_1 и c_2, ни отъ вида функцій z и всегда равняется $(O_2O_1I_1I_2)$.

Постоянная $(O_2O_1I_1I_2)$ зависитъ отъ положенія точекъ O_1,O_2 на горизонтѣ и слѣдовательно отъ выбора координатныхъ осей и комплексныхъ единицъ. Если $(O_1O_2I_1I_2)=-1$, то касательныя къ кривымъ $z_1(x_1,x_2)=c_1,z_2(x_1,x_2)=c_2$ въ точкѣ ихъ пересѣченія будутъ гармонично сопряжены съ прямыми, соединяющими эту точку съ I_1 и I_2.

Въ качествѣ втораго примѣра мы разсмотримъ функцію

$$z=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{51}$$

которая даетъ намъ соотношенія

$$u_z=\frac{u_au_x+u_b}{u_cu_x+u_d}, \quad v_z=\frac{v_av_x+v_b}{v_cv_x+v_d}. \tag{51'}$$

Такъ какъ

$$u_x=I_1(I_2I_3ux), \quad u_z=I_1(I_2I_3uz),$$
$$v_x=I_2(I_1I_3ux), \quad v_z=I_2(I_1I_3uz),$$

то эти соотношенія опредѣляютъ проэктивное преобразованіе инваріантныхъ пучковъ, первое—пучка съ центромъ I_1, второе—пучка съ центромъ I_2. Обратно, если уравненія

$$z_1=z_1(x_1,x_2), \quad z_2=z_2(x_1,x_2)$$

преобразуютъ инваріантныя пучки проэктивно, то между u_z,v_z съ одной стороны и u_x,v_x—съ другой должны существовать соотношенія (51'), и z будетъ функціей отъ x вида (51). Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема IV.—*Функція (51) преобразуетъ инваріантные пучки проэктивно, и обратно всякое преобразованіе плоскости, при которомъ инваріантные пучки преобразуются проэктивно, опредѣлится функціей (51), если надлежащимъ образомъ выберемъ числа a,b,c,d.*

Отсюда вытекаютъ такія слѣдствія.

1. Извѣстно, что въ пучкѣ, преобразуемомъ проэктивно, два луча не измѣняютъ своего положенія. Очевидно, что 4 точки пересѣченія пары такихъ лучей въ пучкѣ съ центромъ I_1 съ парой подобныхъ же лучей въ пучкѣ съ центромъ I_2 останутся неподвижными. Итакъ существуетъ 4 точки плоскости, которыя не измѣняютъ своего положенія въ преобразованіи, опредѣляемомъ функціей (51). Въ зависимости отъ того, будутъ ли эти точки дѣйствительны, мнимы или совпадать, характеръ преобразованія можетъ быть весьма разнообразенъ.

2. Если точка x описываетъ коническое сѣченіе (пару прямыхъ), проходящее черезъ инваріантныя точки I_1 и I_2, то пучекъ (I_1x) будетъ проэктивенъ пучку (I_2x). Но пучки $(I_1z),(I_2z)$ проэктивны пучкамъ $(I_1x),(I_2x)$, слѣдовательно пучекъ (I_1z) будетъ проэктивенъ пучку (I_2z) и точка z будетъ описывать коническое сѣченіе (пару прямыхъ), проходящее черезъ I_1 и I_2. Итакъ коническое сѣченіе (пара прямыхъ), которое проходитъ черезъ инваріантныя точки I_1 и I_2 горизонта, преобразуется въ коническое сѣченіе (пару прямыхъ), также проходящее черезъ точки I_1 и I_2.

Если число α опредѣлимъ изъ уравненія

$$\alpha c+d=0,$$

то для $x=\alpha$ будемъ имѣть $z=\infty$: слѣдовательно всѣ коническія сѣченія, которыя проходятъ черезъ точки α,I_1,I_2 преобразуются въ пару прямыхъ линій, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ горизонтомъ.

Опредѣливъ число β изъ ур.

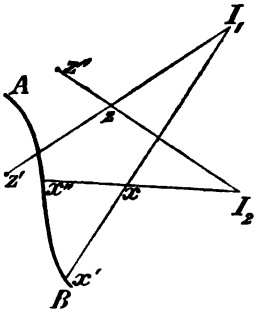
$$\beta c=a,$$

мы будемъ имѣть $\beta=z$, при $x=\infty$: слѣдовательно всѣ пары прямыхъ, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ горизонтомъ, преобразуются въ коническія сѣченія, проходящія черезъ I_1,I_2,β.

Пара прямыхъ, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ точку I_1, а другая черезъ I_2, преобразуется въ такую же пару.

17. **Опредѣленіе вида функціи.** — Въ теоріи функціи обыкновеннаго мнимаго перемѣннаго доказывается, что функція вполнѣ опредѣляется внутри той области, въ которой она остается непрерывной, если намъ извѣстны ея значенія для всѣхъ точекъ прямолинейнаго отрѣзка какъ бы малъ этотъ отрѣзокъ ни былъ. Такъ какъ функція z комплекснаго перемѣннаго x характеризуется двумя функціями φ и ψ обыкновеннаго перемѣннаго, то только что упомянутое свойство функціи мнимаго перемѣннаго должно принадлежать и функціи комплекснаго перемѣннаго x. Итакъ функція комплекснаго перемѣннаго вполнѣ опредѣляется, если намъ извѣстны значенія ея для всѣхъ точекъ нѣкоторой части дѣйствительной или мнимой прямой линіи, какъ бы эта часть мала ни была.

Чертежъ 4.



Найти значеніе функціи для какой нибудь точки x, когда намъ извѣстны ея значенія для всѣхъ точекъ нѣкоторой кривой линіи AB нетрудно. Опредѣляемъ точки пересѣченія x' и x'' прямыхъ xI_1 и xI_2 съ кривой AB. Пусть z' и z'' значенія функціи для точекъ x' и x''; точка z пересѣченія прямыхъ $z'I_1$ и $z''I_2$ и будетъ изображать значеніе функціи, соотвѣтствующее значенію x перемѣннаго независимаго. Переведя это рѣшеніе на языкъ анализа, увидимъ, что если

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t)$$

суть уравненія кривой AB и

$$z_1 = F_1(t),\ z_2 = F_2(t)$$

значенія z_1 и z_2, соотвѣтствующія значенію t перемѣннаго параметра, то координаты точки z опредѣлятся изъ ур.

$$u_z = u_1 z_1 + u_2 z_2 = u_1 F_1(t_1) + u_2 F_2(t_1),$$
$$v_z = v_1 z_1 + v_2 z_2 = v_2 F_1(t_2) + v_2 F_2(t_2),$$

гдѣ t_1 и t_2 суть корни уравненій

$$u_x=u_1x_1+u_2x_2=u_1f_1(t_1)+u_2f_2(t_1),$$
$$v_x=v_1x_1+v_2x_2=v_1f_1(t_2)+v_2f_2(t_2).$$

Задача рѣшается весьма просто, когда линія AB будетъ прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой μ: функція z должна имѣть видъ

$$F(u_x)\xi+F(v_x)\eta=\varphi(u_x)\xi+\psi(v_x)\eta,$$

если
$$F(t)=\varphi(t)\xi+\psi(t)\eta \qquad (52)$$

суть значенія ея для $x=\mu t$, ибо при $x=\mu t$

$$u_x=(u_1\mu_1+u_2\mu_2)t=t,$$
$$v_x=(v_1\mu_1+v_2\mu_2)t=t.$$

Особенно важны тѣ функціи, которыя при $x=\mu t$ имѣютъ видъ $\mu f(t)$, гдѣ $f(t)$ обыкновенная функція обыкновеннаго перемѣннаго t. Принимая во вниманіе, что $\xi+\eta=\mu$, изъ формулы (52) видно, что это возможно только при условіи

$$\varphi(t)=\psi(t)=f(t).$$

Такую функцію комплекснаго перемѣннаго мы назовемъ функціей f. Итакъ, если функція z комплекснаго перемѣннаго x для $x=\mu t$ имѣетъ видъ $\mu f(t)$, то

$$z=f(x)=f(u_x)\xi+f(v_x)\eta.$$

Изъ этой формулы мы находимъ слѣдующія выраженія для тригонометрическихъ, показательной и логариѳмической функцій отъ x:

$$\sin x=\sin u_x\,.\,\xi+\sin v_x\,.\,\eta, \qquad (53)$$
$$\cos x=\cos u_x\,.\,\xi+\cos v_x\,.\,\eta, \qquad (54)$$
$$\log x=\log u_x\,.\,\xi+\log v_x\,.\,\eta, \qquad (55)$$
$$e^x=e^{u_x}\xi+e^{v_x}\eta. \qquad (56)$$

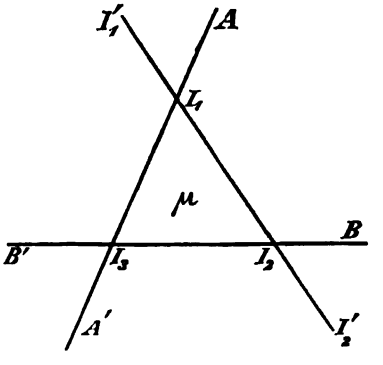
Отсюда имѣемъ:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\log xy=\log x+\log y,$$
$$e^{x+y}=e^x\,.\,e^y,$$
$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x, \text{ и т. д.}$$

гдѣ x и y могутъ быть какія угодно комплексныя числа. Любопытно, что тригонометрическія функціи комплекснаго перемѣннаго представляютъ собой двояко-періодическія функціи съ періодами $2\pi\xi$ и $2\pi\eta$: это видно изъ формулъ (53) и (54).

18. **Эллиптическія и гиперболическія системы.** — Мы знаемъ, что комплексныя числа съ модулемъ операціи умноженія могутъ быть трехъ типовъ. Различіе между типами заключается въ томъ, что инваріантныя прямыя, которыя проходятъ черезъ начало координатъ, для чиселъ перваго типа дѣйствительны и раздѣльны, для чиселъ втораго раздѣльны и мнимо-сопряжены и, наконецъ, для чиселъ третьяго дѣйствительны и совпадаютъ. Въ первомъ случаѣ числа U_1/U_2, u_1, u_2, V_1/V_2, v_1, v_2, $2\varkappa$ дѣйствительны и послѣднее отлично отъ нуля; во второмъ случаѣ U_1/U_2, u_1, u_2 будутъ числами мнимыми сопряженными съ V_1/V_2, v_1, v_2 соотвѣтственно и число $2\varkappa$ будетъ чисто мнимымъ, отличнымъ отъ нуля. Въ третьемъ случаѣ $U_1/U_2=V_1/V_2$, $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ и $2\varkappa=0$.

Чертежъ 5.



Вытекающія изъ указаннаго различія особенности для каждой изъ системъ, мы разсмотримъ теперь нѣсколько подробнѣе. Въ этомъ § мы остановимъ наше вниманіе на проэктивно-полярныхъ координатахъ и изучимъ значенія, которыя могутъ получать модуль и аргументъ комплексныхъ чиселъ перваго и втораго типовъ для дѣйствительныхъ точекъ.

Для чиселъ перваго типа функціи u_x, v_x имѣютъ дѣйствительныя значенія во всѣхъ точкахъ плоскости. Обращаясь въ безконечность и измѣняя свой знакъ при переходѣ точки x черезъ горизонтъ, во всѣхъ другихъ точкахъ плоскости онѣ остаются непрерывными. Такъ какъ онѣ обращаются въ нуль,

измѣняя свой знакъ, первая—когда точка x переходитъ черезъ инваріантную прямую I_3I_1, вторая—когда x переходитъ черезъ инваріантную прямую I_3I_2, такъ какъ обѣ функціи въ точкѣ μ, изображающей модуль операціи умноженія, какъ видно изъ равенствъ (21), равняются единицѣ, то знаки функцій $\Delta_x=u_xv_x$ и v_x/u_x будутъ слѣдующіе (чертежъ 5):

въ углу AI_3B + , въ углу $A'I_3B'$ +,
— AI_3B' — , — $A'I_3B$ —.

Поэтому модуль числа x, $\sqrt{\Delta_x}$, и аргументъ его u будутъ имѣть такой видъ:

$$\begin{array}{lcccc} & & \sqrt{\Delta_x} & u \\ \text{въ углахъ } AI_3B \text{ и } A'I_3B' & \pm & \varrho_0 & u_0+\dfrac{n\pi i}{\varkappa} \\ — \ AI_3B' \text{ и } A'I_3B & \pm & i\varrho_0 & u_0+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi i}{\varkappa} \end{array}$$

гдѣ ϱ_0 нѣкоторое положительное, u_0— дѣйствительное, а n—цѣлое число. На инваріантныхъ прямыхъ I_1I_3, I_2I_3 модуль обращается въ нуль, а аргументъ въ безконечность, на горизонтѣ I_1I_2 модуль обращается въ безконечность, а аргументъ имѣетъ конечныя значенія. Что касается до знака $\sqrt{\Delta_x}$ и числа n, входящаго въ выраженіе аргумента, то согласно сдѣланному въ § 14 замѣчанію, мы должны ихъ выбрать такимъ образомъ, чтобы равенства (35) были справедливы въ отношеніи знака. Удовлетворить этому условію мы можемъ или беря произвольно знакъ $\sqrt{\Delta_x}$ и затѣмъ подбирая надлежащимъ образомъ число n, или выбирая произвольно число n и подбирая затѣмъ къ нему знакъ модуля. Такъ, напр., модуль и аргументъ могутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{въ области} & \sqrt{\Delta_x} & u & & \sqrt{\Delta_x} & u & \\ I_3I_1I_2 & +\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa} & & +\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa} & \\ B'I_3I_1I_1'I_2'I_2B & +i\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi i}{\varkappa} & & +i\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi i}{\varkappa} & (57) \\ B'I_3A'AI_1I_2B & +\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa}+\dfrac{\pi i}{\varkappa} & & -\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa} & \\ A'I_3I_2I_2'I_1'I_1A & +i\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\pi i}{\varkappa} & & -i\varrho_0 & u_0+2m\dfrac{\pi i}{\varkappa}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi i}{\varkappa} & \end{array}$$

Въ первомъ случаѣ аргументъ будетъ прерывенъ на всѣхъ трехъ инваріантныхъ прямыхъ: вещественная часть его будетъ обращаться въ $-\infty$ и въ $+\infty$ на инваріантныхъ прямыхъ I_3I_1 и I_3I_2, а мнимая часть будетъ дѣлать скачекъ $\pi i/2\varkappa$ на прямыхъ I_3I_1 и I_3I_2 и скачекъ $\pi i/\varkappa$ на горизонтѣ. Во второмъ случаѣ аргументъ будетъ испытывать прерывъ только на инваріантныхъ прямыхъ I_3I_1 и I_3I_2 такого же характера, какъ и въ первомъ случаѣ, на горизонтѣ же будетъ измѣняться непрерывно, при томъ для всѣхъ точекъ прямой, проходящей черезъ начало координатъ, аргументъ будетъ одинъ и тотъ же.

Въ первомъ случаѣ модуль будетъ имѣть знакъ $+$ во всѣхъ точкахъ плоскости, во второмъ онъ будетъ помножаться на i при переходѣ черезъ инваріантныя прямыя.

Кривая $\Delta_x=c_0$ будетъ для $c_0>0$ лежать въ углахъ AI_3B и $A'I_3B'$, для $c_0<0$—въ углахъ AI_3B' и $A'I_3B$. При $c_0=+\infty$ она будетъ безконечно узкимъ эллипсомъ, совпадающимъ съ отрѣзкомъ I_1I_2 горизонта. По мѣрѣ уменьшенія c_0 этотъ эллипсъ будетъ дѣлаться все шире и шире, при нѣкоторомъ значеніи c_0 онъ обратится въ параболу (конечно въ предположеніи, что плоскость, точками которой мы изображаемъ комплексныя числа—Эвклидова плоскость), а затѣмъ перейдетъ въ гиперболу, все болѣе и болѣе приближающуюся къ инваріантнымъ прямымъ I_1I_3 и I_2I_3, съ которыми она и сольется при $c_0=0$. Коническое сѣченіе $\Delta_x=c_0$ при $c_0<0$ всегда будетъ гиперболой, одна вѣтвь которой будетъ лежать въ углу AI_3B', а другая—въ углу $A'I_3B$. Начавъ съ того, что при достаточно маломъ по абсолютной величинѣ c_0 она будетъ близка къ инваріантнымъ прямымъ, при возрастаніи абсолютной величины c_0 она будетъ все болѣе и болѣе удаляться отъ этихъ прямыхъ и при $c_0=-\infty$ сольется съ частью $I_1I_1'I_2'I_2$ горизонта.

Для чиселъ втораго типа функціи u_x и v_x будутъ мнимыми и сопряженными во всѣхъ точкахъ плоскости. Поэтому функція Δ_x для всѣхъ дѣйствительныхъ точекъ плоскости будетъ оставаться дѣйствительной и положительной, обращаясь въ нуль въ началѣ координатъ, въ $+1$—въ точкѣ u, и въ безконечность—на горизонтѣ. Отношеніе

$$u_x : v_x=\cos 2\varphi_0+i\sin 2\varphi_0,$$

если черезъ φ_0 означимъ аргументъ числа u_x. Такимъ образомъ модуль и аргументъ будутъ имѣть слѣдующій видъ

$$\pm\varrho_0 \qquad i(\varphi_0+n\pi) : \varkappa$$

Оба они будутъ дѣйствительны во всѣхъ точкахъ плоскости. Принимая во вниманіе, что функціи u_x и v_x мѣняютъ свой знакъ при переходѣ точки x черезъ горизонтъ и что u_x, v_x, Δ_x равняются единицѣ въ точкѣ μ, мы можемъ выбрать знакъ модуля и число n двояко. Если будемъ считать модуль вездѣ положительнымъ, то аргументъ въ точкахъ плоскости лежащихъ съ той же стороны горизонта гдѣ лежитъ и точка μ будетъ имѣть видъ

$$i(\varphi_0+2m\pi) : \varkappa, ,$$

а съ противоположной видъ

$$i(\varphi_0+(2m+1)\pi) : \varkappa.$$

Если же будемъ считать модуль положительнымъ съ той стороны горизонта гдѣ лежитъ точка μ и отрицательнымъ съ противоположной, то во всѣхъ точкахъ плоскости аргументъ будетъ имѣть видъ

$$i(\varphi_0+2m\pi) : \varkappa.$$

Въ первомъ случаѣ аргументъ будетъ прерывенъ на горизонтѣ, измѣняясь на величину $\pi i/\varkappa$, когда точка x будетъ переходить съ одной стороны горизонта на другую; во второмъ—аргументъ во всей плоскости будетъ измѣняться непрерывно.

Инваріантныя прямыя $\Delta_x=0$ имѣютъ только одну общую имъ дѣйствительную точку — начало координатъ. Кривая $\Delta_x=c_0$ при $c_0>0$ и достаточно маломъ будетъ эллипсомъ, внутри котораго лежитъ начало координатъ, при нѣкоторомъ значеніи c_0 перейдетъ въ гиперболу, все болѣе и болѣе приближающуюся къ горизонту, съ которымъ она и сольется при $c_0=\infty$. Коническое сѣченіе при $c_0<0$ будетъ мнимымъ.

19. **Числа втораго класса.**—Если, примѣняя общую теорію комплексныхъ чиселъ съ модулемъ операціи умноженія къ комплекснымъ числамъ перваго класса, мы не встрѣчаемъ никакихъ затрудненій, по крайней мѣрѣ аналитическаго характера, то нельзя того же сказать, относительно прило-

женія общей теоріи къ комплекснымъ числамъ втораго класса. При $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ многія изъ выведенныхъ нами формулъ принимаютъ неопредѣленный видъ, а нѣкоторыя уравненія и равенства становятся одинаковыми, такъ что мы уже не имѣемъ уравненій въ числѣ достаточномъ для нахожденія неизвѣстныхъ величинъ. Чтобы избѣгнуть затрудненій мы разсматриваемъ систему комплексныхъ чиселъ втораго класса какъ вырожденную систему класса перваго, какъ предѣльный случай такой системы перваго класса, для которой инваріантныя прямыя, проходящія черезъ начало координатъ, будучи вначалѣ раздѣльными, затѣмъ сближаются между собой все болѣе и болѣе и, наконецъ, совершенно совпадаютъ. Съ этою цѣлью мы предполагаемъ, что въ формулахъ и уравненіяхъ, о которыхъ идетъ рѣчь, $u_1 \neq v_1$, $u_2 \neq v_2$, но

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + w_1\varepsilon, \\ v_2 &= u_2 + w_2\varepsilon, \end{aligned} \tag{58}$$

гдѣ ε нѣкоторая безконечно малая величина, а w_1 и w_2 постоянныя, которыя въ силу соотношеній

$$u_1\mu_1 + u_2\mu_2 = 1, \quad v_1\mu_1 + v_2\mu_2 = 1, \tag{59}$$

вытекающихъ изъ формулъ (21), должны быть связаны между собой ур.

$$w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = 0, \tag{60}$$

опредѣляющимъ отношеніе $w_1 : w_2$. Затѣмъ полученныя выраженія разлагаемъ по степенямъ ε, ограничиваясь только членами съ нисшей степенью ε, которые не уничтожаются тожественно или въ силу другихъ соотношеній, и, наконецъ, находимъ предѣльный видъ получаемыхъ выраженій и уравненій при $\varepsilon=0$.

Посмотримъ сначала какой видъ для чиселъ втораго класса примутъ равенства (19) § 11. Второе изъ этихъ равенствъ, сдѣлается теперь тожественнымъ съ первымъ, ибо точки I_1 и I_2 будутъ совпадать. По той же причинѣ равенство третье обратится въ тожество $1=1$. Но если мы представимъ первыя два изъ равенствъ (19), пользуясь формулами (26), въ видѣ:

$$u_x u_a = u_y, \quad v_x v_a = v_y \tag{61}$$

и затѣмъ, принявъ во вниманіе первое, поступимъ со вторымъ какъ только что было указано, то получимъ

$$u_x w_a + u_a w_x = w_y, \tag{62}$$

гдѣ $w_x = w_1 x_1 + w_2 x_2$ и т. д. Раздѣливъ (62) на первое изъ (61), будемъ имѣть

$$\frac{w_x}{u_x} + \frac{w_a}{u_a} = \frac{w_y}{u_y}. \qquad (62')$$

Если для простоты положимъ

$$w_1 = u_2, \quad w_2 = -u_1, \qquad (60')$$

что допускается соотношеніемъ (60), черезъ ν означимъ точку пересѣченія прямыхъ $w_x = u_2 x_1 - u_1 x_2 = 1$ и $u_x = 1$, черезъ ζ—какую нибудь точку горизонта, то легко докажемъ, что

$$u_x = I_1(\zeta I_3 \nu x),$$
$$w_x : u_x = I_3(I_1 u \nu x),$$

послѣ чего равенства (61, 62') дадутъ намъ теорему, которая для чиселъ третьяго типа замѣняетъ собой теорему III § 11.

Теорема I.— *Если* $y = ax$, *то*

$$I_1(\zeta I_3 \nu x).\ I_1(\zeta I_3 \nu a) = I_1(\zeta I_3 \nu y),$$
$$I_3(I_1 u \nu x) + I_3(I_1 u \nu a) = I_3(I_1 u \nu y).$$

Рядъ слѣдствій, вытекающихъ изъ этой теоремы всѣ могутъ быть разсматриваемы какъ предѣльные случаи для соотвѣтствующихъ слѣдствій изъ теоремы III § 11. Поэтому мы обратимъ здѣсь вниманіе только на одно особенно важное.

Если точки x и y лежатъ на двойной инваріантной прямой линіи, то $xy = 0$. Ибо точку x можно представить себѣ лежащей на одной изъ инваріантныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, а точку y на другой безконечно близкой къ первой; по теоремѣ I § 12 произведеніе xy должно изобразиться точкой пересѣченія этихъ безконечно близкихъ инваріантныхъ прямыхъ, т. е. началомъ координатъ, и $xy = 0$. Обратно, произведеніе двухъ чиселъ xy равняется нулю 1) если хотя одинъ изъ множителей равенъ нулю и 2) если обѣ точки x и y лежатъ на двойной инваріантной прямой.

Примѣнивъ указанный выше пріемъ къ формуламъ (31), получаемъ формулы:

$$a_{11} = u_1(u_1 w_2 - 2u_2 w_1) : 2\varkappa', \qquad b_{11} = u_1^2 w_1 : 2\varkappa'$$
$$a_{12} = a_{21} = -u_2^2 w_1 : 2\varkappa', \qquad b_{12} = b_{21} = u_1^2 w_2 : 2\varkappa'$$
$$a_{22} = -u_2^2 w_2 : 2\varkappa', \qquad b_{22} = u_2(2u_1 w_2 - u_2 w_1) : 2\varkappa'$$
$$2\varkappa' = u_1 w_2 - u_2 w_1.$$

Принимая во вниманіе (60′), имѣемъ такую теорему.

Теорема II.—*Если* $U_1x_1+U_2x_2=0$ *есть ур. двойной инваріантной прямой,* μ_1 *и* μ_2 *суть координаты точки, изображающей модуль операціи умноженія, то коэффиціенты таблицы умноженія опредѣлятся формулами:*

$$\begin{aligned} a_{11}&= u_1(1+u_2\mu_2), & b_{11}&=-u_1{}^2\mu_2,\\ a_{12}=a_{21}&= u_2{}^2\mu_2, & b_{12}=b_{21}&= u_1{}^2\mu_1,\\ a_{22}&=-u_2{}^2\mu_1, & b_{22}&= u_2(u_1\mu_1+1), \end{aligned} \qquad (63)$$

въ которыхъ u_1 *и* u_2 *найдутся изъ ур.* (*21*).

Для чиселъ третьяго типа функція Δ_x будетъ точнымъ квадратомъ : $\Delta_x=u_x{}^2$, и слѣдовательно во всѣхъ точкахъ плоскости будетъ оставаться положительной, обращаясь въ нуль на двойной инваріантной прямой и въ безконечность на горизонтѣ. Что касается до модуля, то формулы (35) обращаясь въ слѣдующую

$$\sqrt{\Delta_x}=u_x=I_1(I_2I_3{}^\varkappa x),$$

показываютъ, что модуль мы всегда должны считать равнымъ линейной функціи u_x.

Такъ какъ $u_x=v_x$, $\varkappa=0$, то формула

$$u=\frac{1}{2\varkappa}\log\frac{u_x}{v_x}$$

даетъ для u неопредѣленное выраженіе $0:0$. Но поступая такъ, какъ выше было указано, мы получаемъ

$$u=-\frac{1}{u_1w_2-u_2w_1}\,\frac{w_x}{u_x},$$

или

$$u=\frac{w_x}{u_x}=I_3(I_1{}^\mu x)$$

Изъ выраженій для модуля и аргумента комплекснаго числа слѣдуетъ, что теорема I можетъ быть выражена равенствами (41) и (42) и формулирована такимъ образомъ: модуль произведенія равняется произведенію модулей множителей, аргументъ произведенія равняется суммѣ аргументовъ множителей.

Означая число $u_2e_1 — u_1e_2$, которое изображается точкой, лежащей на двойной инваріантной прямой, и вторая степень котораго будетъ слѣдовательно равняться нулю, черезъ ω, приведемъ число x къ виду

$$x=x_1e_1+x_2e_2=u_x u+w_x\omega,$$

или, принимая модуль u и число ω за новыя комплексныя единицы,

$$x=u_x+w_x\omega;$$

отсюда видно, что величины, которыя, изучая комплексныя числа втораго класса, я назвалъ главною частью числа x и его параметромъ, суть ничто иное какъ модуль этого числа и его аргументъ [1]).

Кривая $\Delta_x=c_0$ обращаются въ пары прямыхъ линій образующихъ пучекъ съ центромъ въ инваріантной точкѣ I_1.

Формулы (44) и (46) не даютъ намъ непосредственно выраженія для функціи комплекснаго перемѣннаго въ системѣ втораго класса. Ибо ур. (46) дѣлаются тожественными, если положимъ $u_1=v_1$ и $u_2=v_2$, а второе изъ ур. (44) мы сами должны сдѣлать тожественнымъ съ первымъ изъ нихъ, принявъ $\psi(u_x)=\varphi(u_x)$ для того, чтобы оно при $u_1=v_1$ и $u_2=v_2$ не было въ противорѣчіи съ первымъ; для опредѣленія функцій z_1 и z_2 у насъ остается такимъ образомъ только одно конечное и одно эквивалентное ему диф. уравненіе. Чтобы получить другое, недостающее, ур. подставляемъ вмѣсто v_1 и v_2 ихъ выраженія (58) во второе изъ ур. (46), разлагаемъ обѣ части по степенямъ ε и, замѣчая, что члены свободные отъ ε взаимно уничтожаются въ силу перваго ур., приравниваемъ коэффиціенты при первой степени ε. Тогда получаемъ ур.

$$(u_1w_2+u_2w_1)\left(\frac{dz_1}{dx_1}-\frac{dz_2}{dx_2}\right)=2\left(u_1w_1\frac{dz_1}{dx_2}-u_2w_2\frac{dz_2}{dx_1}\right).$$

Введя вмѣсто x_1 и x_2 перемѣнныя w_x и u_x, преобразуемъ послѣднее ур. и первое изъ ур. (46) въ слѣдующія

$$u_1\frac{dz_1}{dw_x}+u_2\frac{dz_2}{dw_x}=0,$$

$$u_1\frac{dz_1}{du_x}+u_2\frac{dz_2}{du_x}=w_1\frac{dz_1}{dw_x}+w_2\frac{dz_2}{dw_x},$$

[1]) «Винтовое счисленіе», § 18. Уч. Зап. Каз. Унив., Сент., 1895 г.

откуда

$$u_z = u_1 z_1 + u_2 z_2 = \varphi(u_x)$$
$$w_z = w_1 z_1 + w_2 z_2 = \varphi'(u_x) w_x + \psi(u_x)$$

гдѣ φ и ψ произвольныя функціи. Послѣднее ур. получается также и изъ ур. (44). Въ самомъ дѣлѣ, когда v_1 и v_2 дѣлаются равными u_1 и u_2, функція ψ, стоящая во второй части второго равенства (44), должна сдѣлаться равной функціи φ; поэтому $\psi(v_x) = \varphi(v_x) + \varepsilon\psi_1(v_x)$ и слѣдовательно, ограничиваясь членами перваго порядка относительно ε, имѣемъ:

$$\psi(v_x) = \varphi(u_x) + \varepsilon[w_x \varphi'(u_x) + \psi_1(u_x)].$$

Подставивъ это значеніе $\psi(v_x)$ во второе изъ равенствъ (44) и вычитая первое, получимъ

$$w_z = w_1 z_1 + w_2 z_2 = \varphi'(u_x) w_x + \psi_1(u_x)$$

—второе, недостающее, равенство. Если для большей простоты положимъ $w_1 = \mu_2$, $w_2 = -\mu_1$ и примемъ μ и число $\omega = u_2 e_1 - u_1 e_2$ за комплексныя единицы, то будемъ имѣть

$$x = u_x + w_x \omega$$
$$z = u_z + w_z \omega = \varphi(u_x) + \omega[\varphi'(u_x) w_x + \psi(u_x)].$$

Итакъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема III.—*Для того, чтобы z было функціей комплекснаго перемѣннаго $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ въ системѣ второго класса, z_1 и z_2 должны опредѣляться изъ уравненій*

$$\begin{aligned} u_z &= u_1 z_1 + u_2 z_2 = \varphi(u_x), \\ w_z &= w_1 z_1 + w_2 z_2 = \varphi'(u_x) w_x + \psi(u_x), \end{aligned} \tag{64}$$

гдѣ φ и ψ совершенно произвольныя функціи.

20. **Единицы μ и ω.**—Въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ выборъ комплексныхъ единицъ e_1 и e_2 былъ совершенно произволенъ. Мы перепишемъ теперь нѣкоторыя изъ выведенныхъ формулъ въ предположеніи, что одна изъ единицъ есть модуль операціи умноженія и слѣдовательно точка μ одна изъ точекъ масштаба, а прямая $I_3\mu$ одна изъ координатныхъ осей. Тогда, какъ было показано въ § 6, разсматриваемыя

комплексныя числа примутъ видъ $x_1+x_2\omega$, причемъ вторая степень ω опредѣлится характеристическимъ равенствомъ

$$(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)=0.$$

Принимая модуль за одну изъ комплексныхъ единицъ, мы имѣемъ $\mu_1=1$, $\mu_2=0$, и далѣе

$$\Delta_x=(x_1+\varkappa_1x_2)(x_1+\varkappa_2x_2)$$
$$U_1=1,\ U_2=\varkappa_1,\ V_1=1,\ V_2=\varkappa_2,$$
$$u_1=1,\ u_2=\varkappa_1,\ v_1=1,\ v_2=\varkappa_2,$$
$$u_x=x_1+\varkappa_1x_2,\ v_x=x_1+\varkappa_2x_2$$
$$2\varkappa=\varkappa_1-\varkappa_2\ ^1)$$
$$\xi+\eta=1\ ,\ \xi=\frac{\omega-\varkappa_2}{2\varkappa}=\frac{\varkappa_2-\omega}{\varkappa_2-\varkappa_1}\ ,$$
$$\varkappa_1\xi+\varkappa_2\eta=\omega,\ \eta=\frac{\varkappa_1-\omega}{2\varkappa}=\frac{\varkappa_1-\omega}{\varkappa_1-\varkappa_2}\ .$$

Модуль и аргументъ x опредѣляются формулами

$$\sqrt{\Delta_x}=\sqrt{(x_1+\varkappa_1x_2)(x_1+\varkappa_2x_2)},$$
$$2\varkappa u=\log\frac{x_1+\varkappa_1x_2}{\varkappa_1+\varkappa_2x_2}$$
$$x_1+\varkappa_1x_2=\sqrt{\Delta_x}e^{\varkappa u},$$
$$x_1+\varkappa_2x_2=\sqrt{\Delta_x}e^{-\varkappa u}.$$

Изъ теоремъ § 15 и III § 19 будетъ слѣдовать, что самый общій видъ функціи комплекснаго перемѣннаго $x_1+x_2\omega$ таковъ:

$$\varphi(x_1+\varkappa_1x_2)\xi+\psi(x_1+\varkappa_2x_2)\eta,$$

или

$$\frac{\varkappa_1\psi(x_1+\varkappa_2x_2)-\varkappa_2\varphi(x_1+\varkappa_1x_2)}{2\varkappa}+\frac{\varphi(x_1+\varkappa_1x_2)-\psi(x_1+\varkappa_2x_2)}{2\varkappa}\omega$$

для чиселъ перваго класса, и

$$\varphi(x_1+\varkappa_1x_2)+\omega[x_2\varphi'(x_1+\varkappa_1x_2)+\psi(x_1+\varkappa_1x_2)]$$

---

[1]) Для удобства мы измѣнили знакъ $2\varkappa$. Ср. (22′).

для чиселъ второго класса ($\varkappa_1 = \varkappa_2$).

Если коэффиціенты первоначально данной таблицы умноженія дѣйствительны, то $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ будутъ или дѣйствительными, или мнимыми сопряженными числами. Поэтому прямая

$$x_1 + \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} x_2 = 0$$

гармонично сопряженная съ $I_3 \mu$ ($x_2 = 0$) относительно инваріантныхъ прямыхъ $x_1 + \varkappa_1 x_2 = 0$ и $x_1 + \varkappa_2 x_2 = 0$ всегда будетъ дѣйствительна. Возьмемъ точку ω, которая оставалась пока произвольной, на этой прямой и примемъ слѣдовательно самую прямую за вторую координатную ось. По теоремѣ VI § 12 характеристическое равенство приметъ тогда видъ

$$\omega^2 = \varkappa^2.$$

и наши формулы еще болѣе упростятся. Мы будемъ имѣть

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \varkappa.$$

$$\Delta_x = x_1^{\,2} - \varkappa^2 x_2^{\,2}$$

$$\sqrt{\Delta_x} = \sqrt{x_1^{\,2} - \varkappa^2 x_2^{\,2}}, \quad 2\varkappa u = \log \frac{x_1 + \varkappa x_2}{x_1 - \varkappa x_2} \tag{65}$$

$$x_1 + \varkappa x_2 = \sqrt{\Delta_x} e^{\varkappa u}, \quad x_1 - \varkappa x_2 = \sqrt{\Delta_x} e^{-\varkappa u} \tag{66}$$

$$x_1 + x_2 \omega = \sqrt{\Delta_x} (\cosh \varkappa u + \frac{\omega}{\varkappa} \sinh \varkappa u) \tag{67}$$

$$\xi + \eta = 1, \quad \xi - \eta = \frac{\omega}{\varkappa} \tag{68}$$

$$\xi = \frac{\varkappa + \omega}{2\varkappa}, \quad \eta = \frac{\varkappa - \omega}{2\varkappa} \tag{69}$$

Функція комплекснаго перемѣннаго $x_1 + x_2 \omega$ будетъ имѣть видъ:

$$\varphi(x_1 + \varkappa x_2)\xi + \psi(x_1 - \varkappa x_2)\eta, \tag{70}$$

или

$$\frac{\varphi(x_1 + \varkappa x_2) + \psi(x_1 - \varkappa x_2)}{2} + \frac{\varphi(x_1 + \varkappa x_2) - \psi(x_1 - \varkappa x_2)}{2\varkappa} \omega \tag{71}$$

для чиселъ перваго класса, и

$$\varphi(x_1) + \omega[x_2 \varphi'(x_1) + \psi(x_1)] \tag{72}$$

для чиселъ второго класса.

Видъ функціи, которая при $x=x_1$ имѣетъ значеніе

$$f(x_1)=f_1(x_1)+f_2(x_1)\omega,$$

будетъ

$$f(x)=f(x_1+x_2\omega)=f(x_1+\varkappa x_2)\xi+f(x_1-\varkappa x_2)\eta \qquad (73)$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2}[f_1(x_1+\varkappa x_2)+f_1(x_1-\varkappa x_2)+\varkappa(f_2(x_1+\varkappa x_2)-f_2(x_1-\varkappa x_2))]$$

$$+\frac{\omega}{2}[f_2(x_1+\varkappa x_2)+f_2(x_1-\varkappa x_2)+\frac{1}{\varkappa}(f_1(x_1+\varkappa x_2)-f_1(x_1-\varkappa x_2))]$$

для чиселъ перваго класса, и

$$f(x)=f_1(x_1)+\omega[x_2f_1'(x_1)+f_2(x_1)] \qquad (74)$$

для чиселъ второго класса.

Если $f_2(x_1)\equiv 0$, то модуль функціи $f(x_1+x_2\omega)$ и ея аргументъ опредѣляются формулами

$$\sqrt{f(x_1+\varkappa x_2)f(x_1-\varkappa x_2)}, \qquad (75)$$

$$\frac{1}{2\varkappa}\log\frac{f(x_1+\varkappa x_2)}{f(x_1-\varkappa x_2)}. \qquad (76)$$

Изъ предыдущихъ формулъ мы имѣемъ слѣдующія

$$\sin(x_1+x_2\omega)=\sin x_1\cos\varkappa x_2+\frac{\omega}{\varkappa}\cos x_1\sin\varkappa x_2 \qquad (77)$$

$$\cos(x_1+x_2\omega)=\cos x_1\cos\varkappa x_2-\frac{\omega}{\varkappa}\sin x_1\sin\varkappa x_2 \qquad (78)$$

$$\log(x_1+x_2\omega)=\log\sqrt{\Delta_x}+\omega u \qquad (79)$$

$$e^{x_1+x_2\omega}=e^{x_1}(\cosh\varkappa x_2+\frac{\omega}{\varkappa}\sinh\varkappa x_2) \qquad (80)$$

$$x_1+x_2\omega=\sqrt{\Delta_x}e^{\omega u}$$

21. **Изображеніе комплексныхъ чиселъ точками поверхности второго порядка.**—Въ заключеніе этой главы покажемъ, какимъ образомъ комплексныя числа съ двумя единицами мы можемъ изображать точками поверхности второго порядка. Назовемъ для удобства ту плоскость, точками которой мы изображали до сихъ поръ комплексныя числа, плоскостью A

и вообразимъ себѣ поверхность второго порядка S, пересѣкающуюся съ горизонтомъ въ инваріантныхъ точкахъ I_1, I_2 разсматриваемой системы комплексныхъ чиселъ. Проведя черезъ горизонтъ плоскость касательную къ поверхности S и опредѣливъ ея точку касанія O_4, установимъ соотвѣтствіе между точками плоскости A и ихъ проэкціями изъ точки O_4 на поверхность S. Такъ какъ всякая прямая, проведенная черезъ точку O_4, имѣемъ кромѣ O_4 еще только одну общую съ поверхностью S точку, то это соотвѣтствіе будетъ вообще говоря однозначно. Исключенія будутъ представлять только точки горизонта. Въ самомъ дѣлѣ, если точка P лежитъ на горизонтѣ и не совпадаетъ ни съ одной изъ инваріантныхъ точекъ I_1 и I_2, то прямая O_4P будетъ касаться поверхности S, ибо она лежитъ въ плоскости проведенной черезъ горизонтъ I_1I_2 и касательной къ S, и слѣдовательно проэкція точки P будетъ находиться въ точкѣ O_4. Если же точка P совпадаетъ съ инваріантной точкой I_1, то, припоминая, что обѣ точки O_4 и I_1, лежатъ на поверхности S въ одной и той же касательной къ этой поверхности плоскости, мы легко убѣдимся, что линія O_4P вся лежитъ на поверхности S и служитъ прямолинейной образующей этой поверхности. Линія O_4P также будетъ цѣликомъ лежать на поверхности S, если точка P совпадаетъ со второй инваріантной точкой I_2. Такимъ образомъ каждой точкѣ плоскости A, кромѣ точекъ I_1 и I_2, соотвѣтствуетъ одна точка поверхности S, и обратно каждой каждой точкѣ поверхности S, кромѣ O_4, соотвѣтствуетъ одна точка плоскости A. Всѣмъ точкамъ горизонта, кромѣ I_1 и I_2, соотвѣтствуетъ одна точка O_4: точкамъ же I_1 и I_2—прямолинейныя образующія O_4I_1 и O_4I_2 поверхности S.

Пусть x и X соотвѣтствующія точки плоскости A и поверхности S. До сихъ поръ мы изображали комплексное число $x=x_1e_1+x_2e_2$ точкою x. Но понятно, что мы можемъ условиться представлять его и точкою X. Тогда всякое комплексное число x съ конечными и опредѣленными коэффиціентами изобразится нѣкоторой вполнѣ опредѣленной точкой X поверхности S, и обратно всякой точкѣ поверхности S, не совпадающей съ O_4, будетъ соотвѣтствовать одно вполнѣ опредѣленное комплексное число. Числа

$$I_1=\infty.\eta,\ I_2=\infty.\xi$$

изобразятся прямыми O_4I_1 и O_4I_2, а всѣ другія числа вида

$$\infty e_1+\infty.e_2.$$

точкой O_4.

Проведемъ въ плоскости A черезъ инваріантную точку I_1 прямую линію и спроэкцируемъ ее изъ точки O_4 на поверхность S. Проэктирующая плоскость, проходя черезъ точки O_4 и I_1 будетъ содержать прямолинейную производящую O_4I_1 поверхности S и слѣдовательно съ этой поверхностью пересѣчется по двумъ прямымъ линіямъ: по линіи O_4I_1 и по прямолинейной образующей, принадлежащей къ другой чѣмъ O_4I_1 системѣ. Такимъ образомъ линіи, проведенной въ плоскости A черезъ I_1, будетъ соотвѣтствовать прямолинейная образующая поверхности S, пересѣкающая O_4I_1, а инваріантному пучку съ центромъ I_1—производящія одной и той же системы этой поверхности. Другая система производящихъ будетъ соотвѣтствовать инваріантному пучку съ центромъ I_2. Вслѣдствіе такого свойства установленнаго нами соотвѣтствія между поверхностью S и плоскостью A, изъ теоремы I § 16 мы выводимъ слѣдующую.

Теорема I.—*Если комплексныя числа съ двумя единицами мы будемъ изображать точками поверхности второго порядка, то функція комплекснаго перемѣннаго опредѣлитъ такое преобразованіе поверхности, при которомъ прямолинейныя производящія одного и того же рода переходятъ въ производящія того же рода. Обратно всякое преобразованіе поверхности второго порядка, при которомъ прямолинейныя производящія переходятъ въ производящія того же рода, можно задать нѣкоторой функціей комплекснаго перемѣннаго надлежащимъ образомъ построенной коммутативной, ассоціативной и опредѣленной системы комплексныхъ чиселъ.*

Остановимся нѣсколько подробнѣе на одномъ частномъ случаѣ изложеннаго способа представленія комплексныхъ чиселъ. Возьмемъ точку O_4 гдѣ нибудь внѣ плоскости A и, принявъ точки O_1,O_2,O_3,O_4 (§ 8, чертежъ 1) за вершины координатнаго тетраэдра, означимъ черезъ X_1,X_2,X_3,X_4 тетраэдрическія координаты точки X. Не трудно убѣдиться, что поверхность второго порядка

$$\Delta_X - aX_3X_4 = 0 \qquad (81)$$

проходитъ черезъ точки I_1,I_2,O_3,O_4, что плоскости касательныя къ поверхности въ этихъ точкахъ суть $O_3O_4I_1$, $I_2O_3O_4$, $O_3I_1I_2$, $I_1I_2O_4$, и что линіи O_3I_1,O_4I_2 суть образующія одной системы, а O_3I_2 и O_4I_1—другой системы этой поверхности. Въ силу указанныхъ свойствъ, мы можемъ поверхность (81) принять за поверхность S и воспользоваться ей для геометрическаго представленія комплексныхъ чиселъ. Легко видѣть,

что координаты точки, изображающей число $x=x_1e_1+x_2e_2$ на поверхности (81), будутъ таковы:

$$ax_1,\ ax_2,\ a,\ \triangle_x$$

Ибо, во-первыхъ, эта точка лежитъ на поверхности (81), а во-вторыхъ на линіи, соединяющей точку $O_4(0,0,0,1)$ съ точкой $(\sigma x,\sigma x,\sigma,0)$, которая изображаетъ комплексное число x въ плоскости A.

Если коэффиціенты таблицы умноженія и число a будутъ дѣйствительны, то и поверхность (81) будетъ также дѣйствительна и дѣйствительныя комплексныя числа (т. е. числа, у которыхъ коэффиціенты дѣйствительны) будутъ изображаться таковыми же точками поверхности (81). Когда система комплексныхъ чиселъ будетъ гиперболической, то точки I_1,I_2 и линіи O_3I_1, O_3I_2 будутъ дѣйствительны и раздѣльны: поверхность (81) будетъ линейчатой съ двумя раздѣльными системами дѣйствительныхъ производящихъ. Когда система комплексныхъ чиселъ будетъ эллиптической, то прямыя O_3I_1, O_3I_2 и точки I_1,I_2 будутъ мнимыми и сопряженными и поверхность (81) будетъ овальной съ мнимыми производящими. Наконецъ, когда система комплексныхъ чиселъ будетъ параболической, то прямыя O_3I_1,O_3I_2 и точки I_1,I_2 совпадутъ, и поверхность (81) будетъ имѣть только одну систему производящихъ, т. е. будетъ конусомъ. Отсюда теорема.

Теорема II.—*Комплексныя числа съ двумя единицами, мы можемъ изображать точками поверхности второго порядка такъ, что дѣйствительныя числа будутъ изображаться дѣйствительными точками. При этомъ поверхность второго порядка для гиперболической системы будетъ линейчатой съ двумя раздѣльными системами производящихъ, для эллиптической—овальной съ мнимыми производящими, для параболической—конусомъ.*

Глава II.

22. **Абсолютъ.**—Прежде чѣмъ мы обратимся къ изложенію теоріи векторовъ, условимся въ нѣкоторыхъ терминахъ и обозначеніямъ.

Положеніе точекъ и плоскостей въ пространствѣ мы будемъ опредѣлять помощью четырехъ однородныхъ проэктивныхъ координатъ, относя какъ точки такъ и плоскости къ одному и тому же основному тетраэдру. Выраженіе

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 + X_4x_4,$$

какъ принято въ аналитической геометріи, мы будемъ означать черезъ X_x или x_X и выборъ единичной точки и единичной плоскости мы всегда будемъ предполагать сдѣланнымъ такимъ образомъ, что условіе лежанія точки $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$ въ плоскости $X(X_1,X_2,X_3,X_4)$ имѣемъ видъ $X_x=x_X=0$.

Чтобы имѣть возможность оцѣнивать относительное положеніе точекъ, линій и плоскостей, мы выберемъ разъ навсегда нѣкоторую поверхность второго порядка, которую по примѣру Cayley назовемъ абсолютомъ. Пусть

$$\sum a_{ik}x_ix_k=0$$

гдѣ

$$a_{ik}=a_{ki} \qquad (1)$$

есть ур. абсолюта въ точечныхъ координатахъ. Квадратичную функцію, стоящую въ первой части ур. абсолюта, мы будемъ означать черезъ $f(xx)$, половины ея частныхъ производныхъ по x_1,x_2,x_3,x_4—черезъ $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$, билинейную форму, поляризированную изъ $f(xx)$, — черезъ $f(xy)$; такимъ образомъ:

$$f(xx)=\sum a_{ik}x_ix_k,$$

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,$$

$$f_3(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,$$

$$f_4(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4,$$

$$f(xx)=x_1f_1(x)+x_2f_2(x)+x_3f_3(x)+x_4f_4(x),$$

$$f(xy)=x_1f_1(y)+x_2f_2(y)+x_3f_3(y)+x_4f_4(y)=\sum a_{ik}x_iy_k, \quad (2)$$

$$f(xy)=y_1f_1(x)+y_2f_2(x)+y_3f_3(x)+y_4f_4(x)=\sum a_{ik}y_ix_k.$$

Абсолютъ устанавливаетъ весьма важное соотвѣтстіе между точками и плоскостями пространства: каждой точкѣ соотвѣтствуетъ полярная съ ней плоскость, каждой плоскости—ея полюсъ. Извѣстно, что координаты плоскости X, полярной съ точкой x, опредѣляются изъ ур.:

$$\sigma X_1=f_1(x), \qquad (1234) \qquad (3)$$

гдѣ σ множитель пропорціональности. Чтобы обратно по данной плоскости X найти ея полюсъ x, мы должны рѣшить послѣднія ур. относительно x_1,x_2,x_3,x_4. Сдѣлавъ это, получимъ:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1&=A_{11}X_1+A_{12}X_2+A_{13}X_3+A_{14}X_4=F_1(X),\\
\varrho x_2&=A_{21}X_1+A_{22}X_2+A_{23}X_3+A_{24}X_4=F_2(X),\\
\varrho x_3&=A_{31}X_1+A_{32}X_2+A_{33}X_3+A_{34}X_4=F_3(X),\\
\varrho x_4&=A_{41}X_1+A_{42}X_2+A_{43}X_3+A_{44}X_4=F_4(X),
\end{aligned} \qquad (4)$$

гдѣ коэффиціенты при X_1,X_2,X_3,X_4 суть миноры опредѣлителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

связанные въ силу (1) соотношеніями

$$A_{ik}=A_{ki}$$

и $\varrho=\Delta/\sigma$ множитель пропорціональности. Вслѣдствіе этихъ соотношеній вторыя части равенствъ (4), которыя мы означили черезъ $F_1(X),F_2(X),F_3(X),F_4(X)$, представляютъ собой половины частныхъ производныхъ по X_1,X_2,X_3,X_4 одной и той же квадратичной формы

$$F(XX)=\sum A_{ik}X_iX_k,$$

$$F_1(X)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_1},\ F_2(X)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_2},\ F_3(X)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_3},\ F_4(X)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_4}.$$

Форму поляризированную изъ $F(XX)$ мы будемъ означать черезъ $F(XY)$:

$$F(XY)=X_1F_1(Y)+X_2F_2(Y)+X_3F_3(Y)+X_4F_4(Y)=$$
$$=\sum A_{ik}X_iY_k,$$
$$F(XY)=Y_1F_1(X)+Y_2F_2(X)+Y_3F_3(X)+Y_4F_4(X)=$$
$$=\sum A_{ik}Y_iX_k. \qquad (5)$$

Для того, чтобы плоскость X касалась абсолюта она должна проходить черезъ свой полюсъ x, т. е.

$$X_x=X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3+X_4x_4=0,$$

или, если воспользуемся (4),

$$F(XX)=\sum A_{ik}X_iX_k=0.$$

Это ур., представляющее условіе касанія плоскости X абсолюта, будетъ ур. абсолюта въ плоскостныхъ координатахъ.

23. **Перпендикулярныя точки, линіи и плоскости.**—Двѣ точки называются взаимно перпендикулярными, если онѣ гармонично сопряжены съ двумя точками пересѣченія линіи, ихъ соединяющей, съ абсолютомъ. Геометрическое мѣсто точекъ перпендикулярныхъ къ точкѣ x есть плоскость X полярная съ точкой x. Для того, чтобы двѣ точки x и y были взаимно перпендикулярны, одна изъ нихъ должна лежать въ плоскости полярной съ другой, т. е. должно быть

$$X_y=X_1y_1+X_2y_2+X_3y_3+X_4y_4=0,$$

или, по ур. (3) и (2), $\quad f(xy)=0.$

Геометрическое мѣсто точекъ одновременно перпендикулярныхъ къ двумъ даннымъ x и y есть прямая XY пересѣченія плоскостей полярныхъ съ x и y, т. е. поляра линіи xy. Такъ какъ всякая плоскость полярная съ точкой, лежащей на линіи xy, проходитъ черезъ линію XY, то всѣ точки одной изъ двухъ взаимныхъ поляръ перпендикулярны къ точкамъ другой.

Есть только одна точка перпендикулярная къ тремъ точкамъ x,y,z—это точка пересѣченія плоскостей X,Y,Z полярныхъ съ x,y,z, т. е. полюсъ плоскости xyz.

Двѣ плоскости называются взаимно перпендикулярными, если онѣ гармонично сопряжены съ двумя плоскостями, проведенными черезъ линію ихъ пересѣченія и касательными къ абсолюту. Всѣ плоскости перпендикулярныя къ одной плоскости X проходятъ черезъ ея полюсъ x. Для того, чтобы двѣ плоскости X и Y были взаимно перпендикулярными одна изъ нихъ должна проходить черезъ полюсъ другой, т. е. должно быть

$$Y_x = Y_1x_1 + Y_2x_2 + Y_3x_3 + Y_4x_4 = 0,$$

или по ур. (5) и (4) $F(XY)=0$.

Геометрическое мѣсто плоскостей одновременно перпендикулярныхъ къ двумъ даннымъ X и Y есть пучекъ плоскостей, для котораго осью служитъ линія xy, соединяющая полюсы x и y плоскостей X и Y, т. е. поляра линіи XY. Такъ какъ полюсы плоскостей, проходящихъ черезъ XY всѣ лежатъ на линіи xy, то всѣ плоскости, проходящія черезъ одну изъ двухъ взаимныхъ поляръ перпендикулярны ко всѣмъ плоскостямъ, проходящимъ черезъ другую.

Есть только одна плоскость перпендикулярная къ тремъ X,Y,Z—это плоскость проходящая черезъ полюсы x,y,z плоскостей X,Y,Z, т. е. плоскость полярная съ точкой XYZ.

Двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи называются взаимно перпендикулярными, если онѣ гармонично сопряжены съ двумя прямыми, проведенными черезъ ихъ точку встрѣчи и касательными къ кривой, по которой ихъ плоскость пересѣкается съ абсолютомъ. Если двѣ линіи перпендикулярны, то каждая изъ нихъ пересѣкаетъ поляру другой, такъ что совокупность линій перпендикулярныхъ къ данной образуетъ конгруэнцію, директрисами которой служатъ данная линія и ея поляра.

Черезъ каждую точку проходитъ вообще одна линія перпендикулярная къ данной прямой — это линія пересѣченія двухъ плоскостей, проведенныхъ черезъ точку, изъ которыхъ

одна проходитъ кромѣ того черезъ данную линію, а другая— черезъ ея поляру.

Въ каждой плоскости находится вообще только одна линія перпендикулярная къ данной прямой—это линія, соединяющая точки пересѣченія данной линіи и ея поляры съ плоскостью.

Плоскость и ея полюсъ называются взаимно перпендикулярными плоскостью и точкой. Плоскость X и точка x будутъ, слѣдовательно, взаимно перпендикулярны, если ихъ координаты связаны ур. (3) или (4).

Прямая линія и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая проходитъ черезъ полюсъ плоскости. Очевидно, что плоскость, которая проходитъ черезъ одну изъ двухъ взаимныхъ поляръ, перпендикулярна къ другой, ибо полюсъ ея лежитъ на этой послѣдней. Такимъ образомъ существуетъ безчисленное множество линій перпендикулярныхъ къ одной плоскости: всѣ онѣ проходятъ черезъ полюсъ плоскости, и существуетъ безчисленное множество плоскостей перпендикулярныхъ къ одной линіи: всѣ онѣ проходятъ черезъ поляру этой линіи. Черезъ данную точку проходитъ вообще только одна линія перпендикулярная къ данной плоскости: линія, соединяющая точку съ полюсомъ плоскости. Черезъ данную точку проходитъ вообще только одна плоскость перпендикулярная къ данной линіи: плоскость проведенная черезъ данную точку и поляру данной линіи. Линія перпендикулярная къ плоскости перпендикулярна ко всякой линіи ее пересѣкающей и проведенной въ плоскости.

Прямая линія и точка называются взаимно перпендикулярными, если линія лежитъ въ плоскости полярной съ точкой. Очевидно, что точка, которая лежитъ на одной изъ двухъ взаимныхъ поляръ, перпендикулярна къ другой, ибо полярныя съ ней плоскости проходятъ черезъ эту послѣднюю. Такимъ образомъ существуетъ безчисленное множество линій перпендикулярныхъ къ точкѣ: онѣ всѣ лежатъ въ плоскости перпендикулярной къ точкѣ, и существуетъ безчисленное множество точекъ перпендикулярныхъ къ линіи: онѣ всѣ лежатъ на полярѣ этой линіи. Въ данной плоскости можно провести вообще только одну линію перпендикулярную къ точкѣ: линія пересѣченія данной плоскости и плоскости полярной съ данной точкой. Въ данной плоскости существуетъ вообще только одна точка перпендикулярная къ данной линіи: точка пересѣченія данной плоскости и поляры къ данной линіи. Линія

перпендикулярная къ точкѣ перпендикулярна по всякой линіи ее пересѣкающей и проведенной черезъ точку.

24. **Векторъ и роторъ.**—Точка, плоскость и прямая линія служатъ простѣйшими геометрическими элементами. Въ высшей геометріи за основные элементы принимаются не рѣдко болѣе сложныя геометрическія образованія, которыя получаются отъ соединенія двухъ или нѣсколькихъ изъ простѣйшихъ: точекъ, плоскостей и линій. Основные элементы теоріи векторовъ—векторъ, роторъ, моторъ—представляютъ собой такіе болѣе сложные элементы, и въ этомъ смыслѣ теорія векторовъ можетъ считаться отраслью высшей геометріи.

Векторомъ называется совокупность двухъ точекъ; одна изъ точекъ вектора называется его началомъ или начальной точкой, а другая—концомъ или конечной точкой. Прямая, соединяющая начало и конецъ вектора называется лучемъ вектора. Векторъ считается равнымъ нулю, если его начало и конецъ совпадаютъ. Векторъ мы будемъ означать или одной буквой греческаго алфавита, или же двумя или нѣсколькими буквами, которыми означены концы вектора, ставя въ послѣднемъ случаѣ впереди всегда буквы, относящіяся къ началу.

Совокупность двухъ плоскостей называется роторомъ; одна изъ плоскостей ротора называется его началомъ или начальной плоскостью, другая—концомъ или конечной плоскостью. Прямая пересѣченія плоскостей ротора называется осью ротора. Роторъ считается равнымъ нулю, если его начальная и конечная плоскости совпадаютъ. Роторъ мы будемъ означать или одной буквой греческаго или славянскаго алфавита, или же двумя или нѣсколькими буквами, которыми означены начальная и конечная плоскости, ставя впереди буквы, относящіяся къ начальной плоскости.

Мы займемся сначала изученіемъ свойствъ связки векторовъ и связки роторовъ. Такъ мы будемъ называть совокупность векторовъ, имѣющихъ общее начало, и совокупность роторовъ съ общей начальной плоскостью.

25. **Сложеніе векторовъ.**—Пусть ox и oy суть векторы съ общимъ началомъ $o(o_1,o_2,o_3,o_4)$ и конечными точками $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и $y(y_1,y_2,y_3,y_4)$ и пусть $O(O_1,O_2,O_3,O_4)$ плоскость полярная съ общимъ началомъ векторовъ o, такъ что

$$O_1=f_1(o) \qquad (1234) \qquad (3')$$

и $$O_x=f(ox),\ O_y=f(oy),\ O_o=f(oo).$$

Суммой векторовъ ox и oy называется векторъ oz, у котораго общее начало o съ векторами ox и oy, а концомъ служитъ точка z, имѣющая слѣдующія координаты

$$\sigma z_1 = O_y O_o x_1 + O_x O_o y_1 - O_x O_y o_1, \qquad (1234)\ (6)$$

или $$\sigma z_1 = f(oy)f(oo)x_1 + f(ox)f(oo)y_1 - f(ox)f(oy)o_1, \qquad (1234)\ (7)$$

гдѣ σ множитель пропорціональности. Векторы ox и oy по отношенію къ вектору oz называются составляющими или слагаемыми векторами. Чтобы показать, что oz есть сумма ox и oy пишутъ $oz = ox + oy$.

Теорема.—*Концомъ вектора $oz = ox + oy$ служитъ вершина противоположная съ o въ четыреугольникѣ построенномъ на векторахъ ox и oy такъ, что противоположныя стороны его пересѣкаются на плоскости полярной съ общимъ началомъ.*

Такъ какъ точки, лежащія въ плоскости O, полярной съ o, перпендикулярны къ точкѣ o, то эту теорему мы можемъ формулировать еще такимъ образомъ.

Концомъ вектора $oz = ox + oy$ служитъ вершина противоположная съ o въ четыреугольникѣ построенномъ на векторахъ ox и oy такъ, что противоположныя стороны его пересѣкаются въ точкахъ перпендикулярныхъ къ общему началу векторовъ.

Переписавъ для доказательства теоремы координаты z_1, z_2, z_3, z_4 такимъ образомъ

$$\sigma z_1 = O_y O_o x_1 + O_x (O_o y_1 - O_y o_1), \qquad (1234)$$

мы видимъ, что точка z лежитъ на прямой, соединяющей точку x съ точкой

$$b_1 = O_o y_1 - O_y o_1. \qquad (1234)$$

Эта послѣдняя находится съ одной стороны на прямой oy, а съ другой въ плоскости O, ибо

$$O_b = \sum O_i (O_o y_i - O_y o_i) = O_o O_y - O_y O_o = 0,$$

и совпадаетъ, слѣдовательно, съ точкой пересѣченія прямой oy и плоскости O. Подобнымъ же образомъ, представивъ координаты z_1, z_2, z_3, z_4 въ видѣ

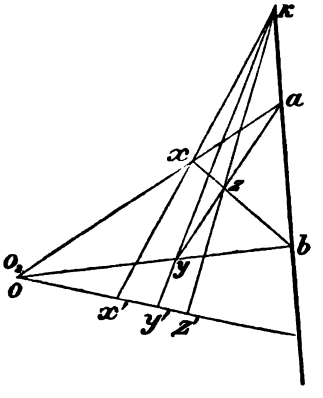
$$\sigma z_1 = O_x O_o y_1 + O_y (O_o x_1 - O_x o_1), \qquad (1234)$$

мы убѣдимся, что точка z лежитъ на прямой, которая соединяетъ точку y съ точкой a:

$$a_1 = O_o x_1 - O_x o_1 \qquad (1234)$$

пересѣченія линіи ox и плоскости O. Точка z лежитъ такимъ образомъ въ пересѣченіи линій ay и bx и служитъ вершиной противоположной съ o въ четыреугольникѣ $oxyz$, который удовлетворяетъ условіямъ теоремы, ибо противоположныя его стороны ox и yz, oy и xz пересѣкаются соотвѣтственно въ точкахъ a и b плоскости O (см. чертежъ 2).

Чертежъ 2.



Итакъ теорема доказана и мы видимъ, что для построенія вектора $oz = ox + oy$ мы должны поступать слѣдующимъ образомъ: продолжаемъ линіи ox и oy до пересѣченія соотвѣтственно въ точкахъ a и b съ плоскостью O и соединяемъ b съ x и a съ y; точка z пересѣченія линій ay и bx и будетъ концомъ вектора $oz = ox + oy$. Это правило геометрическаго сложенія двухъ векторовъ мы будемъ называть правиломъ четыреугольника.

Отмѣтимъ нѣкоторыя частные случаи сложенія векторовъ.

1. Если точка o, начало векторовъ ox и oy, лежитъ на абсолютѣ, то плоскость O проходитъ черезъ o, точки a, b и z совпадаютъ съ точкой o и векторъ $oz = 0$, каковы бы ни были векторы ox и oy. Это видно также изъ формулъ (6), которыя при $O_o = f(oo) = 0$ даютъ

$$\delta z_1 = -O_y O_x o_1. \qquad (1234)$$

2. Если конецъ вектора ox перпендикуляренъ къ его началу, то точка x лежитъ въ плоскости O, точки a и z совпадаютъ съ точкой x и $oz=ox$, каковъ бы ни былъ векторъ oy. Это видно также изъ формулъ (6), которыя при $O_x=f(ox)=0$ обращаются въ слѣдующія:

$$\sigma z_1=O_yO_ox_1. \qquad (1234)$$

3. Если обѣ точки x и y перпендикулярны къ началу и слѣдовательно лежатъ въ плоскости O, то линіи xb и ya совпадаютъ съ линіей xy. Точка z также лежитъ въ плоскости O, но положеніе ея на линіи xy неопредѣленно. Оно можетъ сдѣлаться опредѣленнымъ, если извѣстенъ законъ, по которому точки x и y приближаются къ плоскости O. Формулы (6) также оставляютъ положеніе точки z неопредѣленнымъ, ибо при $O_x=O_y=0$ онѣ принимаютъ видъ

$$\sigma z_1=0. \qquad (1234)$$

4. Если лучи векторовъ ox и oy совпадаютъ, то линіи ay,bx и oxy также совпадаютъ. Слѣдовательно точка z будетъ лежать на одной прямой съ точками o,x,y, но правило четыреугольника не опредѣляетъ положенія z на этой линіи. Между тѣмъ, если мы обратимся къ формуламъ (6) и, принявъ во вниманіе, что точка y лежитъ на одной прямой съ точками o и x, положимъ

$$y_1=\lambda o_1+\mu x_1, \qquad (1234)$$

гдѣ λ и μ нѣкоторыя постоянныя, то для точки z получимъ такія координаты

$$\sigma z_1=(2\mu O_xO_o+\lambda O_o^2)x_1-\mu O_x^2o_1, \qquad (1234)$$

которыми вполнѣ опредѣлится ея положеніе на прямой ox. Такимъ образомъ, когда векторы ox и oy лежатъ на одной прямой, ихъ сумма вполнѣ опредѣленна и лежитъ на той же прямой, но правило четыреугольника для построенія суммы становится непримѣнимымъ. Какъ построить векторъ $oz=ox+oy$ въ этомъ случаѣ, мы покажемъ ниже.

26. **Сложеніе роторовъ.** — Пусть OX и OY суть роторы съ общей начальной плоскостью $O(O_1,O_2,O_3,O_4)$ и конечными плоскостями $X(X_1,X_2,X_3,X_4)$ и $Y(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$ и o—полюсъ ихъ общей начальной плоскости O, такъ что

$$o_1=F_1(O), \qquad (1234)$$

и $$o_X=F(OX),\ o_Y=F(OY),\ o_O=F(OO).$$

Суммой роторовъ OX и OY называется роторъ OZ, у котораго общая начальная плоскость O съ роторами OX и OY, а конечной плоскостью служитъ плоскость Z, имѣющая слѣдующія координаты

$$\sigma Z_1 = o_Y o_O X_1 + o_X o_O Y_1 - o_X o_Y O_1, \qquad (1234)\ (8)$$

или

$$\sigma Z_1 = F(OY)F(OO)X_1 + F(OX)F(OO)Y_1 - F(OX)F(OY)O_1, \qquad (1234)\ (9)$$

гдѣ σ множитель пропорціональности. Роторы OX и OY по отношенію къ ротору OZ называются слагаемыми или составляющими. Чтобы показать, что OZ есть сумма OX и OY, пишутъ $OZ=OX+OY$.

Теорема.—*Конечной плоскостью ротора $OZ=OX+OY$ служитъ грань Z противоположная съ O въ четыреграннике, построенномъ на роторахъ OX и OY такъ, что противоположныя ребра его лежатъ въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ полюсъ общей начальной плоскости роторовъ.*

Такъ какъ плоскости, проходящія черезъ полюсъ плоскости O, къ ней перпендикулярны, то эту теорему мы можемъ формулировать еще такимъ образомъ.

Конечной плоскостью ротора $OZ=OX+OY$ служитъ грань Z противоположная съ O въ четыреграннике, построенномъ на роторахъ OX и OY такъ, что противоположныя ребра его лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ общей начальной плоскости роторовъ.

Съ цѣлью построить такой четыреграннике мы проводимъ черезъ точку o и линіи OX и OY соотвѣтственно плоскости A и B и опредѣляемъ пересѣченіе XB плоскостей X и B и пересѣченіе YA плоскостей Y и A. Такъ какъ плоскости X,Y,A,B всѣ проходятъ черезъ одну и ту же точку (точку пересѣченія плоскостей O,X,Y), то линіи XB и YA лежатъ въ одной плоскости Z. Четыреграннике $OXYZ$ удовлетворяетъ условіямъ теоремы, и $OZ=OX+OY$.

Эта теорема можетъ быть доказана совершенно также какъ и теорема предыдущаго §, которой она соотвѣтствуетъ по принципу двойственности. Вытекающее изъ теоремы правило геометрическаго построенія ротора OZ по даннымъ роторамъ OX и OY, мы назовемъ правиломъ четыреграннника.

Отмѣтимъ слѣдующіе частные случаи сложенія роторовъ.

1. Если плоскость O, начало роторовъ OX и OY, касается абсолюта, то точка o лежитъ на ней, и $OZ=0$, каковы бы ни были роторы OX и OY. Это видно также изъ формулъ (8), которыя при $o_O=F(OO)=0$ даютъ

$$\sigma Z_1=-o_X o_Y O_1. \qquad (1234)$$

2. Если конецъ ротора OX перпендикуляренъ къ его началу, то плоскость X проходитъ черезъ точку o, плоскости A и Z совпадаютъ съ плоскостью X, и $OZ=OX$, каковъ бы ни былъ роторъ OY. Это видно также изъ формулъ (8), которыя при $o_X=F(OX)=0$ обращаются въ слѣдующія

$$\sigma Z_1=o_Y o_O X_1. \qquad (1234)$$

3. Если обѣ плоскости X и Y перпендикулярны къ началу O, то онѣ обѣ проходятъ черезъ точку o и линіи XB и YA совпадаютъ съ линіей XY; плоскость Z, слѣдовательно, также проходитъ черезъ точку o и линію XY, но положеніе ея опредѣляется не вполнѣ. Формулы (8) также не опредѣляютъ положенія плоскости Z, ибо въ разсматриваемомъ случаѣ $o_X=o_Y=0$, и онѣ принимаютъ видъ

$$\sigma Z_1=0. \qquad (1234)$$

Положеніе плоскости Z можетъ сдѣлаться опредѣленнымъ, если извѣстенъ законъ по которому плоскости X и Y приближаются къ o.

4. Если роторы OX и OY имѣютъ общую ось, то черезъ ихъ ось проходятъ и плоскости A и B, и линіи AY и BX совпадаютъ съ XY. Поэтому плоскость Z также проходитъ черезъ ось роторовъ OX и OY, но положеніе ея опредѣляется не вполнѣ. Если же мы обратимся къ формуламъ (8), то помощью ихъ совершенно также, какъ и въ предыдущемъ §, для двухъ векторовъ съ общимъ лучемъ, мы покажемъ, что плоскость Z, проходя черезъ общую ось OX и OY, занимаетъ вполнѣ опредѣленное положеніе. Такимъ образомъ, когда роторы OX и OY имѣютъ общую ось, сумма ихъ OZ вполнѣ опредѣленна, имѣетъ съ ними общую ось, но правило четыреграннника становится не примѣнимымъ. Какъ построить сумму роторовъ въ этомъ случаѣ мы покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

27. **Проэкціи.**—Проэкціей точки x на плоскость G изъ точки g называется точка пересѣченія линіи gx съ плоскостью G; проэкціей линіи α на плоскость G изъ точки g называется линія пересѣченія плоскостей $g\alpha$ и G. Если g полюсъ плоскости G, то проэкціи точки x и линіи α называются ортогональными.

Проэкціей плоскости X на точку g изъ плоскости G называется плоскость проведенная черезъ g и линію XG; проэкціей линіи α на точку g изъ плоскости G называется линія соединяющая g съ точкой $G\alpha$. Если g полюсъ плоскости G, то проэкціи плоскости X и линіи α называются ортогональными.

Имѣемъ плоскость G, проходящую черезъ начало вектора ox, и точку g перпендикулярную къ o и, слѣдовательно, лежащую въ плоскости O, полярной съ началомъ вектора ox. Геометрической проэкціей или просто проэкціей вектора ox на плоскость G изъ точки g называется векторъ ox', конецъ котораго x' есть пересѣченіе плоскости G съ линіей gx. Когда лучъ вектора ox проходитъ черезъ точку g, то проэкція ox на плоскость G равняется нулю. Если точка g полюсъ плоскости G, то линія gx перпендикулярна къ плоскости G, и проэкція ox' вектора ox на плоскость G называется ортогональной. Ортогональная проэкція ox на плоскость G равняется нулю, когда лучъ ox перпендикуляренъ къ плоскости G.

Имѣемъ двѣ прямыя α и β, изъ которыхъ первая проходитъ черезъ начало вектора ox, а вторая лежитъ въ плоскости O полярной съ o. Геометрической проэкціей или просто проэкціей вектора ox на линію α изъ линіи β называется векторъ ox'', конецъ котораго x'' есть пересѣченіе проэктирующей плоскости βx съ линіей α. Когда лучъ ox проходитъ черезъ линію β, то проэкція ox на линію α равняется нулю. Если линіи α и β будутъ взаимными полярами, то проэктирующая плоскость βx будетъ перпендикулярна къ линіи α, и проэкція ox'' вектора ox на линію α называется ортогональной. Ортогональная проэкція ox на линію α равняется нулю, когда лучъ ox перпендикуляренъ къ линіи α.

Имѣемъ точку g въ начальной плоскости O ротора OX и плоскость G перпендикулярную къ O. Геометрической проэкціей или просто проэкціей ротора OX на точку g изъ плоскости G называется роторъ OX', конечная плоскость котораго проходитъ черезъ точку g и линію GX. Когда плоскость G проходитъ черезъ линію OX, то проэкція OX на точку g равняется нулю. Если плоскость G

и точка g взаимно перпендикулярны, то линія GX перпендикулярна къ точкѣ g и проэкція OX' ротора OX на точку g называется ортогональной. Ортогональная проэкція OX на точку g равняется нулю, когда ось OX перпендикулярна къ точкѣ g.

Имѣемъ двѣ прямыя α и β, изъ которыхъ первая лежитъ въ начальной плоскости O ротора OX, а вторая перпендикулярна къ этой плоскости. Геометрической проэкціей или просто проэкціей ротора OX на линію α изъ линіи β называется роторъ OX'', конечная плоскость котораго X'' проходитъ черезъ линію α и точку βX. Когда ось OX проходитъ чрезъ линію β, проэкція OX на линію α равняется нулю. Если линіи α и β взаимно полярны, то точка βX перпендикулярна къ линіи α и проэкція OX'' вектора OX на линію α называется ортогональной. Ортогональная проэкція OX на линію α равняется нулю, когда ось OX перпендикулярна къ линіи α.

Чтобы имѣть возможность доказать основную теорему теоріи проэкцій — теорему о проэкціи суммы, мы предпошлемъ ей слѣдующія двѣ теоремы.

Теорема I.

Если концы x и y векторовъ ox и oy будутъ перемѣщаться по двумъ прямымъ линіямъ, которыя пересѣкаются на плоскости полярной съ общимъ началомъ векторовъ, то конецъ z вектора $oz=ox+oy$ будетъ также перемѣщаться по прямой, встрѣчающей первыя двѣ въ ихъ точкѣ пересѣченія.

Если конечныя плоскости X и Y роторовъ OX и OY мы будемъ вращать вокругъ двухъ прямыхъ, которыя лежатъ въ одной плоскости съ полюсомъ общаго начала роторовъ, то конечная плоскость Z ротора $OZ=OX+OY$ будетъ также вращаться вокругъ прямой, лежащей въ одной плоскости съ первыми двумя.

Аналитическое доказательство.—Возьмемъ точку g такъ, чтобы она лежала на плоскости O, полярной съ o, и слѣдовательно $O_g=0$. Если точка x будетъ перемѣщаться по прямой $g\xi$, а точка y по прямой $g\eta$, то координаты точекъ x и y будутъ имѣть видъ

$$x_1=\alpha g_1+\beta\xi_1,\quad y_1=\gamma g_1+\delta\eta_1, \qquad (1234)$$

гдѣ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ какіе нибудь перемѣнные параметры, и, въ силу равенства $O_g=0$,

$$O_x=\beta O_\xi,\quad O_y=\delta O_\eta.$$

Подставивъ вмѣсто O_x,O_y,x_1,y_1 ихъ выраженія въ формулы (6),

мы будемъ имѣть для координатъ конца вектора $oz=ox+oy$ выраженія

$$\sigma z_1=(\alpha\delta O_\eta+\beta\gamma O_\xi)O_o g_1+\beta\delta(O_\eta O_o\xi_1+O_\xi O_o r_1-O_\xi O_\eta o_1), \quad (1234)$$

изъ которыхъ видимъ, что точка z будетъ всегда лежать на прямой, соединяющей точку g съ точкой

$$\zeta_1=O_\eta O_o\xi_1+O_\xi O_o r_1-O_\xi O_\eta o_1.$$

Сравненіе координатъ точки ζ съ формулами (6) показываетъ, что точка ζ служитъ концомъ вектора $o\zeta=o\xi+o\eta$ и съ перемѣщеніемъ точекъ x и y по прямымъ $g\xi$ и $g\eta$ не измѣняетъ своего положенія. Такимъ образомъ, когда точки x и y перемѣщаются по неподвижнымъ прямымъ $g\xi$ и gr, точка z, конецъ вектора $oz=ox+oy$, перемѣщается по прямой $g\zeta$ также неподвижной.

Геометрическое доказательство.—Доказываемыя теоремы представляютъ собой слѣдствіе основныхъ, хорошо извѣстныхъ, теоремъ проэктивной геометріи, которыя мы приводимъ здѣсь безъ доказательства.

Если въ двухъ, отнесенныхъ одинъ къ другому, четырехсторонникахъ пять паръ соотвѣтствующихъ вершинъ лежатъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, то черезъ ту же точку проходитъ прямая, соединяющая и шестую пару вершинъ.

Если въ двухъ, отнесенныхъ одинъ къ другому, четыреберникахъ пять паръ соотвѣтствующихъ граней пересѣкаются по прямымъ, которыя всѣ лежатъ въ одной плоскости, то и шестая пара соотвѣтствующихъ граней пересѣкается по прямой, которая лежитъ въ той же плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ четыре вектора ox,oy,ox',oy' такъ, чтобы линіи xx' и yy' пересѣкались въ точкѣ g плоскости O, и построимъ векторы $oz=ox+oy$ и $oz'=ox'+oy'$. Такъ какъ линіи ox и ox' лежатъ съ точкой g въ одной плоскости, то точки a и a' пересѣченія ихъ съ плоскостью O будутъ съ точкой g на одной прямой; точно также и точки b и b' пересѣченія линій oy и oy' съ плоскостью O лежатъ на одной прямой съ g. Такимъ образомъ пять линій xx',yy',aa',bb',go, соединяющія пять паръ соотвѣтствующихъ вершинъ двухъ четырехсторонниковъ $oxyabz$ и $ox'y'a'b'z'$ сходятся въ точкѣ g; слѣдовательно, по упомянутой теоремѣ, черезъ ту же точку g должна проходить и линія zz', соединяющая шестую пару вершинъ этихъ четырехсторонниковъ.

Итакъ лѣвая теорема доказана; изъ нея вытекаетъ правая по принципу двойственности.

Теорема II.

Если концы векторовъ ox и oy будутъ перемѣщаться по плоскостямъ, которыя пересѣкаются съ плоскостью полярной съ началомъ векторовъ по одной и той же прямой, то конецъ вектора oz=ox+oy будетъ также перемѣщаться въ плоскости, которая проходитъ черезъ линію пересѣченія первыхъ двухъ.

Если конечныя плоскости роторовъ OX и OY будутъ вращаться вокругъ двухъ точекъ, которыя лежатъ на одной прямой съ полюсомъ общаго начала роторовъ, то конечная плоскость Z ротора OZ=OX+OY будетъ также вращаться вокругъ точки, которая съ первыми двумя лежитъ на той же прямой.

Аналитическое доказательство. — Возьмемъ какую нибудь плоскость $U(U_1,U_2,U_3,U_4)$. Двѣ плоскости

$$\alpha U_1+\beta O_1,\ \gamma U_1+\delta O_1, \qquad (1234)$$

гдѣ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ какія нибудь постоянныя величины, проходятъ черезъ линію пересѣченія плоскостей U и O и, слѣдовательно, съ плоскостью O пересѣкаются по одной и той же прямой. Если точка x будетъ перемѣщаться въ первой изъ этихъ плоскостей, а точка y—во второй, то

$$\alpha U_x+\beta O_x=0,\ \gamma U_y+\delta O_y=0. \qquad (10)$$

Изъ формулъ (6) для координатъ точки z, конца вектора $oz=ox+oy$, мы имѣемъ:

$$\sigma U_z=O_yO_oU_x+O_xO_oU_y-O_xO_yU_o,$$
$$\sigma O_z=O_xO_yO_o.$$

Если умножимъ эти ур. соотвѣтственно на

$$O_o\alpha\gamma,\ O_o(\gamma\beta+\alpha\delta)+U_o\alpha\gamma,$$

и, сложивъ ихъ, примемъ во вниманіе равенства (10), то получимъ

$$O_o\alpha\gamma U_z+[O_o(\gamma\beta+\alpha\delta)+U_o\alpha\gamma]O_z=0.$$

Изъ этого ур. мы заключаемъ, что, какъ бы точки x и y ни перемѣщались въ указанныхъ выше плоскостяхъ, точки z всегда лежитъ въ плоскости

$$O_o\alpha\gamma U_1+[O_o(\alpha\delta+\beta\gamma)+U_o\alpha\gamma]O_1, \qquad (1234)$$

которая проходитъ черезъ пересѣченіе плоскостей U и O, а слѣдовательно также и черезъ пересѣченіе плоскостей, въ которыхъ перемѣщаются точки x и y.

Геометрическое доказательство.—Взявъ какіе нибудь векторы ox и oy, построимъ векторъ $oz=ox+oy$ и проведемъ черезъ точки x, y, z и какую нибудь линію α, взятую въ плоскости O, плоскости $x\alpha$, $y\alpha$, $z\alpha$. Выбравъ затѣмъ какъ нибудь точки x' и y' на первыхъ двухъ плоскостяхъ $x\alpha$ и $y\alpha$, построимъ $oz'=ox'+oy'$ и докажемъ, что точка z' будетъ лежать въ плоскости $z\alpha$. Проведемъ линіи xx' и yy' и назовемъ точки пересѣченія ихъ съ линіей α черезъ g и g'. По предыдущей теоремѣ, если мы перемѣстимъ точку x въ x', то конецъ z вектора oz перемѣстится въ нѣкоторую точку z_1 ($oz_1=ox'+oy$) прямой gz и значитъ останется въ плоскости $z\alpha$. Если затѣмъ мы перемѣстимъ конецъ y вектора oy въ точку y' то прямой yg', то по той же теоремѣ конецъ z вектора oz изъ точки z_1 перейдетъ въ точку z' ($oz'=ox'+oy'$) по прямой z_1g' и значитъ изъ плоскости $z\alpha$ не выйдетъ.

Итакъ лѣвая теорема доказана; изъ нея слѣдуетъ правая по принципу двойственности.

Предыдущія двѣ теоремы даютъ намъ два способа для геометрическаго построенія суммы двухъ векторовъ или роторовъ, которые имѣютъ общій лучъ или общую ось.

Пусть векторы ox' и oy' имѣютъ общій лучъ.

1. Соединивъ точки x' и y' съ точкой g плоскости O, полярной съ o, прямыми gx' и gy', возьмемъ на этихъ послѣднихъ гдѣ нибудь точки x и y (не на одной прямой съ o) и построимъ $oz=ox+oy$ по правилу четыреугольника. Пусть прямая gz пересѣкаетъ линію $ox'y'$ въ точкѣ z', тогда $oz'=ox'+oy'$. Ибо по теоремѣ I точка z будетъ перемѣщаться по прямой gz', когда точки x и y будутъ перемѣщаться по прямымъ gx' и gy'; съ другой стороны мы видѣли, что точка z должна находиться на линіи $ox'y'$, когда точки x и y придутъ на эту линію. Слѣдовательно точка z должна совпасть съ точкой z', когда x и y совпадутъ въ x' и y' соотвѣтственно.

2. Проведя черезъ какую нибудь линію α плоскости полярной съ o и черезъ точки x' и y' соотвѣственно плоскости $\alpha x'$ и $\alpha y'$, возьмемъ на этихъ послѣднихъ гдѣ нибудь точки x и y (не на одной прямой съ o) и построимъ $oz=ox+oy$ по правилу четыреугольника. Пусть плоскость αz пересѣкаетъ лучъ $ox'y'$ въ точкѣ z'; тогда $oz'=ox'+oy'$. Ибо по теоремѣ II точка z будетъ перемѣщаться въ плоскости $\alpha z'$, когда точки x и y будутъ перемѣщаться въ плоскостяхъ $\alpha x'$ и $\alpha y'$; съ

другой стороны мы видѣли, что точка z должна лежать на прямой $ox'y'$, когда точки x и y придутъ на эту прямую. Слѣдовательно точка z совпадетъ съ точкой z', когда точки x и y совпадутъ съ x' и y' соотвѣтственно.

Изъ сказаннаго относительно сложенія двухъ векторовъ, имѣющихъ общій лучъ, выводимъ помощью принципа двойственности слѣдующія правила сложенія двухъ роторовъ съ общею осью.

Пусть OX' и OY' имѣютъ общую ось.

1. Построивъ линіи пересѣченія плоскостей X' и Y' съ какой нибудь плоскостью G, проходящей черезъ полюсъ o общаго начала роторовъ, проведемъ черезъ эти линіи плоскости X и Y такъ, чтобы онѣ не пересѣкались съ плоскостью O по одной и той же прямой и построимъ по правилу четырегранника $OZ=OX+OY$. Пусть Z' есть плоскость, проходящая черезъ линіи OX' и GZ; тогда $OZ'=OX'+OY'$.

2. Опредѣливъ точки пересѣченія какой нибудь линіи α, проходящей черезъ полюсъ общаго начала роторовъ OX' и OY' съ плоскостями X' и Y', проведемъ черезъ нихъ двѣ плоскости X и Y такъ, чтобы онѣ не пересѣкались бы съ начальной плоскостью O по одной и той же прямой, и построимъ по правилу четырегранника $OZ=OX+OY$. Пусть Z' есть плоскость, проходящая черезъ точку αZ и линію OX'; тогда $OZ'=OX'+OY'$.

Теорема III (основная теорема I).—*Проэкція суммы равняется суммѣ проэкцій.*

Эта теорема заключаетъ въ себѣ собственно четыре теоремы: теоремы о проэкціяхъ векторовъ на плоскость и на линію, теоремы о проэкціяхъ роторовъ на точку и на линію. Достаточно доказать только первыя двѣ, такъ какъ двѣ другія вытекаютъ изъ нихъ по принципу двойственности.

Пусть $oz=ox+oy$ и ox',oy',oz' суть проэкціи векторовъ ox,oy,oz на плоскость G изъ точки g, такъ что линіи xx', yy', zz' всѣ проходятъ черезъ точку g. Если x и y, концы векторовъ ox и oy, мы перемѣстимъ по прямымъ gx' и gy' въ точки x' и y', то z, конецъ вектора $oz=ox+oy$ перемѣстится на основаніи теоремы I по прямой gz' въ точку z'; слѣдовательно $oz'=ox'+oy'$.

Пусть по прежнему $oz=ox+oy$ и ox'',oy'',oz'' суть проэкцій векторовъ ox,oy,oz на линію α изъ линіи β. Точки x'',y'',z'' представляютъ собой пересѣченія плоскостей βx, βy, βz съ линіей α, и изъ даннаго выше второго правила для построенія суммы двухъ векторовъ ox'' и oy'', имѣющихъ общій лучъ, прямо слѣдуетъ, что $ox''+oy''=oz''$.

Слѣдствіе.—Пусть α и β суть векторы (роторы) съ общимъ началомъ, пусть лучи (оси) α и β взаимно перпендикулярны и $\gamma=\alpha+\beta$. Проэктируя векторы (роторы) α, β, γ на лучъ вектора α (ось ротора α) ортогонально, по доказанной теоремѣ будемъ имѣть

$$\text{пр.}\alpha+\text{пр.}\beta=\text{пр.}\gamma.$$

Но пр.α на направленіе своего луча (своей оси) равняется самому вектору (ротору) α, а проэкція вектора (ротора) β равняется нулю, такъ какъ лучи (оси) α и β взаимно перпендикулярны; слѣдовательно

$$\alpha=\text{пр.}\gamma$$

Также покажемъ, что проэкція вектора (ротора) γ на лучъ (ось) β равняется вектору (ротору) β. Итакъ, если лучи (оси) составляющихъ векторовъ (роторовъ) взаимно-перпендикулярны, то каждый изъ нихъ представляетъ собой ортогональную проэкцію суммы на направленіе своего луча (своей оси).

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ мы почти исключительно будемъ пользоваться ортогональными проэкціями, то для краткости мы будемъ называть ихъ просто проэкціями и всякій разъ будемъ обращать вниманіе читателя, если рѣчь будетъ идти о проэкціяхъ не ортогональныхъ.

28. **Свойства суммы.**

Теорема (основная теорема II). — *Операція сложенія коммутативна и ассоціативна.*

Аналитическое доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, формулы (6) и (7), которыми опредѣляются координаты конца вектора $oz=ox+oy$, совершенно симметричны относительно координатъ точекъ x и y; слѣдовательно

$$ox+oy=oy+ox.$$

Чтобы доказать законъ ассоціативности операціи сложенія, вычислимъ координаты t_1, t_2, t_3, t_4 конца вектора $ot=(ox+oy)+oz$. Построивъ сначала векторъ $oe=ox+oy$, по формуламъ (6) имѣемъ

$$\sigma e_1=O_xO_oy_1+O_yO_ox_1-O_xO_1o_1, \quad (1234) \qquad (11)$$

и легко вычисляемъ

$$\sigma O_e=O_xO_yO_o. \qquad (12)$$

Пользуясь снова формулами (6), для координатъ конца $ot = oe + oz$ получаемъ:

$$\sigma' t_1 = O_x O_o e_1 + O_e O_o z_1 - O_e O_x o_1, \qquad (1234)$$

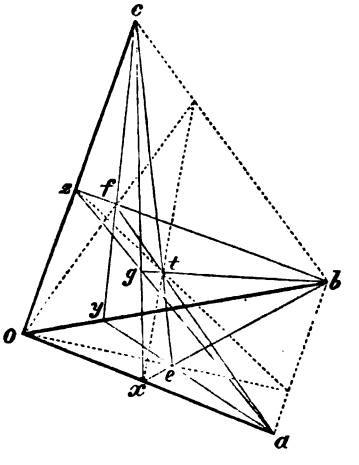
или, принявъ во вниманіе (11) и (12),

$$\rho t_1 = O_y O_x O_o x_1 + O_x O_x O_o y_1 + O_x O_y O_o z_1 - 2 O_x O_y O_x o_1, \quad (1234)$$

гдѣ $\rho = \sigma\sigma'/O_o$ и σ, σ' суть множители пропорціональности. Разсматривая эти выраженія для координатъ точки t, мы видимъ, что они симметричны относительно x,y,z: точка t будетъ служить, поэтому, концомъ не только для вектора $(ox + oy) + oz$, но и для вектора $ox + (oy + oz)$. Итакъ

$$ox + (oy + oz) = (ox + oy) + oz,$$

Чертежъ 6.



что и требовалось доказать. Совершенно также доказывается коммутативность и ассоціативность сложенія роторовъ.

Геометрическое доказательство.—Въ геометрическихъ построеніяхъ, которыя мы употребляемъ для того, чтобы сложить векторы ox и oy, оба вектора играютъ совершенно одинаковую роль и потому

$$ox + oy = oy + ox.$$

Чтобы доказать законъ ассоціативности операціи сложенія, возьмемъ какіе нибудь три вектора ox, oy, oz и предположимъ сначала, что лучи ихъ не лежатъ въ одной и той же плоскости. Опредѣливъ точки a, b, c пересѣченія линій ox,oy,oz съ плоскостью O, полярной съ o, проводимъ плоскости xbc,yac,zab. Мы получаемъ такимъ образомъ шестигранникъ $oxyzgeft$, въ которомъ пары противоположныхъ граней пересѣкаются по прямымъ bc, ca, ab, лежащимъ въ плоскости O, а противоположныя ребра—въ точкахъ a, b, c. Изъ чертежа мы усматриваемъ:

$$oc=ox+oy,\ oe+oz=(ox+oy)+oz=ot;$$
$$of=oy+oz;\ ox+of=ox+(oy+oz)=ot;$$

слѣдовательно

$$ox+(oy+oz)=(ox+oy)+oz. \qquad (13)$$

что и требовалось доказать.

Если бы векторы ox,oy,oz лежали въ одной плоскости G (но не на одной прямой), то мы всегда можемъ построить три вектора ox', oy', oz' такъ, что они не будутъ лежать въ одной плоскости и векторы ox, oy, oz будутъ представлять собой ихъ проэкціи изъ точки g на плоскости G (см. § 27). Тогда, по доказанному выше,

$$ox'+(oy'+oz')=(ox'+oy')+oz', \qquad (14)$$

откуда, пользуясь теоремой III § 27, легко выводимъ равенство (13).

Наконецъ, если векторы ox, oy, oz всѣ лежатъ на одной прямой α, то мы можемъ построимъ три вектора ox', oy', oz' такъ, что, во-первыхъ, они не будутъ лежать въ одной плоскости и, во-вторыхъ, векторы ox, oy, oz будутъ представлять собой ихъ проэкціи изъ линіи β, лежащей въ плоскости O. Тогда мы снова имѣемъ равенство (14), изъ котораго, снова пользуясь теоремой III § 27, выводимъ (13).

29. **Разложеніе и вычитаніе.**—Задача обратная сложенію векторовъ: разложить данный векторъ oz на два составляющихъ вектора ox и oy вообще говоря неопредѣленна. Чтобы она сдѣлалась опредѣленной, выборъ векторовъ ox и oy долженъ быть ограниченъ нѣкоторыми условіями. Особенно часто приходится рѣшать слѣдующія двѣ задачи.

1. Разложить данный векторъ oz на два, имѣющіе своими лучами линіи ox' и oy' (которыя, конечно, лежатъ въ одной пло-

скости съ лучемъ oz). Опредѣливъ точки a и b пересѣченія линій ox' и oy' съ плоскостью O, полярной съ o, проводимъ линіи az и bz. Пересѣченіе линій az и oy' даетъ точку y, пересѣченіе bz и ox' даетъ точку x; векторы ox и oy и будутъ искомые. Задача становится неопредѣленной, когда линіи ox' и oy' совпадаютъ съ oz.

2. По даннымъ векторамъ oz и ox найти векторъ oy такъ, чтобы $ox+oy=oz$. Продолживъ линіи xz и ox до пересѣченія съ плоскостью O, полярной съ o, въ точкахъ b и a соотвѣтственно, проводимъ линіи ob и az; точка ихъ пересѣченія y и будетъ концомъ искомаго вектора oy. Какимъ образомъ слѣдуетъ видоизмѣнить это правило въ томъ случаѣ, когда векторы oz и ox имѣютъ общій лучъ, видно изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ. Разсужденіями вполнѣ аналогичными съ тѣми, которыми мы пользовались при доказательствѣ теоремы § 25, легко показать, что координаты точки y опредѣляются по формуламъ

$$\sigma y_1 = O_x O_o z_1 - O_z O_o x_1 + O_x O_z o_1. \qquad (1234)$$

Операція, посредствомъ которой мы находимъ одинъ изъ двухъ слагаемыхъ векторовъ по данной суммѣ и другому слагаемому, называется операціей вычитанія. Каждый изъ двухъ слагаемыхъ векторовъ называется разностью суммы и другого слагаемаго. Такимъ образомъ векторъ oy, удовлетворяющій условію $ox+oy=oz$, есть разность векторовъ oz и ox; пишутъ $oy=oz-ox$.

Если сумма двухъ векторовъ равняется нулю, то каждый изъ нихъ называется равнымъ и прямо-противоположнымъ другому и каждый изъ нихъ считается равнымъ другому взятому со знакомъ минусъ. Такимъ образомъ, если $ox+oy=0$, то векторы ox и oy равны и противоположны и $oy=-ox$, $ox=-oy$. Изъ правила четыреугольника видно, что два вектора могутъ быть равны и прямо-противоположны только въ томъ случаѣ, когда они имѣютъ общій лучъ. Это видно также изъ формулъ (6). Въ самомъ дѣлѣ, если $oz=ox+oy=0$, то точка z совпадаетъ съ точкой o и въ формулахъ (6) мы можемъ замѣнить координаты точки z координатами точки o. Сдѣлавъ это, мы будемъ имѣть соотношенія

$$\sigma o_1 = O_x O_o y_1 + O_y O_o x_1 - O_x O_y o_1, \qquad (1234)$$

изъ которыхъ видно, что точки o, x, y лежатъ на одной прямой.

Задача обратная сложенію роторовъ: разложить данный роторъ OZ на два составляющихъ ротора OX и OY вообще говоря неопредѣленна. Чтобы она стала опредѣленной, выборъ роторовъ OX и OY долженъ быть ограниченъ нѣкоторыми условіями. Особенно часто приходится рѣшать слѣдующія двѣ задачи.

1. Разложить данный роторъ OZ на два OX и OY, имѣющіе своими осями линіи OX' и OY' (которыя, конечно, должны пересѣкаться въ одной и той же точкѣ оси OZ). Проведя черезъ линіи OX' и OY' плоскости A и B перпендикулярныя къ O, строимъ линіи пересѣченія AZ и BZ. Линіи AZ и OY' опредѣляютъ плоскость Y, линіи BZ и OX'— плоскость X; роторы OX и OY и будутъ искомые. Задача становится неопредѣленной, если линіи OX' и OY' совпадаютъ съ осью OZ.

2. По даннымъ роторамъ OZ и OX найти роторъ OY такъ, чтобы $OX+OY=OZ$. Проводимъ черезъ линіи OX и XZ плоскости A и B перпендикулярныя къ O; опредѣляемъ линіи AZ и OB. Плоскость проведенная черезъ эти линіи и будетъ конечной плоскостью Y искомаго ротора OY. Какъ слѣдуетъ видоизмѣнить это правило построенія ротора OY въ томъ случаѣ, когда роторы OZ и OX имѣютъ общую ось, видно изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ. Называя черезъ o полюсъ плоскости O, мы имѣемъ слѣдующія формулы для координатъ плоскости Y:

$$\sigma Y_1 = o_X o_O Z_1 - o_Z o_O X_1 - o_X o_Z O_1. \qquad (1234)$$

Каждый изъ двухъ слагаемыхъ роторовъ называется разностью суммы и другого слагаемаго, а операція, посредствомъ которой находится одно изъ слагаемыхъ по данной суммѣ и другому слагаемому,—операціей вычитанія. Такимъ образомъ роторъ OY, удовлетворяющій условію $OX+OY=OZ$, представляетъ разность между OZ и OX; пишутъ $OY=OZ-OX$.

Если сумма двухъ роторовъ равняется нулю, то каждый изъ нихъ называется равнымъ и противоположнымъ другому и каждый изъ нихъ считается равнымъ другому, взятому со знакомъ минусъ. Такимъ образомъ, если $OX+OY=0$, то роторы OX и OY равны и противоположны и $OY=-OX$ и $OX=-OY$. Равные и прямо-противоположные роторы имѣютъ общую ось.

Опредѣленія, данныя нами операціи геометрическаго вычитанія и отрицательнымъ векторамъ или роторамъ, вполнѣ аналогичны съ опредѣленіями, которыя даются въ алгебрѣ.

операціи алгебраическаго вычитанія и отрицательнымъ числамъ. Вслѣдствіе этой аналогіи съ одной стороны, а съ другой вслѣдствіе свойствъ коммутативности и ассоціативности операціи сложенія, всѣ законы алгебраическаго сложенія и вычитанія будутъ примѣнимы и къ геометрическому сложенію и вычитанію векторовъ и роторовъ. Такъ, напримѣръ,

$$ox+(-oy)=ox-oy,\ ox-(-oy)=ox+oy,\ \text{и т. д.}$$

Замѣчаніе.—Въ теоріи пучка векторовъ важное значеніе имѣетъ плоскостью O перпендикулярная къ общему началу o векторовъ. Пересмотрѣвъ доказательства теоремъ, изложенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы замѣтимъ однако, что мы ни разу не пользовались тѣмъ обстоятельствомъ, что плоскость O полярна съ o, такъ что вся теорія операцій сложенія и разложенія и проэкцій векторовъ на плоскости и на линіи, проходящія черезъ общее начало векторовъ, нисколько не измѣнится, если мы плоскостью перпендикулярной къ началу o назовемъ совершенно произвольную плоскость O, координаты которой и не связаны съ координатами o ур. (3′), а линіями и точками перпендикулярными къ точкѣ o будемъ называть линіи и точки, лежащія въ плоскости O. Такимъ образомъ, когда мы изучаемъ операціи сложенія и разложенія векторовъ, намъ нѣтъ надобности пользоваться абсолютомъ, и выборъ плоскости O можетъ быть совершенно произволенъ. Но когда мы переходимъ къ изученію другихъ операцій надъ векторами или къ изслѣдованію системы векторовъ, имѣющихъ различное начало, то уже должны будемъ для оцѣнки относительнаго положенія и направленія векторовъ воспользоваться абсолютомъ и въ формулахъ, опредѣляющихъ сумму векторовъ, принимать во вниманіе равенства (3′).

То же замѣчаніе можно сдѣлать и по отношенію къ теоріи пучка роторовъ.

30. **Равные векторы и роторы.**—Пусть a и b суть точки, въ которыхъ лучъ вектора xy пересѣкаетъ абсолютъ. Если векторъ $x'y'$ лежитъ на одномъ лучѣ съ векторомъ xy и если рядъ $abxy$ проэктивенъ ряду $abx'y'$:

$$(abxy)\overline{\wedge}(abx'y')$$

или, что все равно, ангармоническія отношенія $(abxy)$ и $(abx'y')$ равны:

$$(xaby)=(abx'y'),\qquad (15)$$

то мы будемъ считать векторъ xy равнымъ вектору $x'y'$. Замѣняя векторъ xy векторомъ $x'y'$, мы будемъ говорить, что мы переносимъ векторъ xy вдоль его луча такъ, что начальная точка его приходитъ въ положеніе x' Мы можемъ такимъ образомъ переносить векторъ вдоль его луча, помѣщая начало его въ какой угодно точкѣ луча. Положеніе конца его опредѣлится тогда условіемъ (15).

Разсмотримъ, какова должна быть зависимость между координатами x, y, x', y', для того, чтобы $xy=x'y'$. По первому условію равенства двухъ векторовъ точки x' и y' должны лежать на одной прямой съ точками x и y; слѣдовательно координаты ихъ должны имѣть видъ

$$x_1'=\lambda x_1+\mu y_1 \quad , \quad y_1'=\lambda' x_1+\mu' y_1. \qquad (1234)$$

Чтобы раскрыть, какія соотношенія налагаетъ на величины λ, μ, λ', μ', второе условіе равенства векторовъ, выражающееся равенствомъ (15), мы должны найти координаты точекъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{c}$ какая нибудь изъ точекъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; такъ какъ точка $\mathfrak{c}$ лежитъ съ одной стороны на линіи xy, а съ другой на абсолютѣ, то ея координаты должны имѣть видъ

$$\mathfrak{c}_1=px_1+\beta y_1, \qquad (1234)$$

причемъ p и β должны удовлетворять уравненію

$$f(\mathfrak{cc})=p^2f(xx)+2p\beta f(xy)+\beta^2 f(yy)=0,$$

откуда имѣемъ

$$p=-f(xy)\pm\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)},$$
$$\beta=\quad f(xx).$$

Одинъ изъ знаковъ передъ корнемъ будетъ соотвѣтствовать точкѣ $\mathfrak{a}$, другой—точкѣ $\mathfrak{b}$; поэтому, называя значенія p черезъ α и γ, мы имѣемъ слѣдующія координаты для точекъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a}_1=\alpha x_1+\beta y_1 \quad , \quad \mathfrak{b}_1=\gamma x_1+\beta y_1 \qquad (1234)$$
$$\alpha=-f(xy)+\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)},$$
$$\beta=\quad f(xx),$$
$$\gamma=-f(xy)-\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)}.$$

Имѣя координаты точекъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, мы находимъ по извѣстной формулѣ аналитической геометріи

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy)=\gamma\lambda\alpha,$$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}x'y')=\frac{\alpha\lambda-\beta\tilde{\lambda}}{\gamma\lambda-\beta\tilde{\lambda}}:\frac{\alpha\lambda'-\beta\tilde{\lambda}'}{\gamma\lambda'-\beta\tilde{\lambda}'},$$

и равенство (15) обращается въ слѣдущее соотношеніе между λ, λ, λ', λ':

$$\frac{\alpha\lambda-\beta\lambda}{\gamma\lambda-\beta\tilde{\lambda}}:\frac{\alpha\lambda'-\beta\tilde{\lambda}'}{\gamma\lambda'-\beta\tilde{\lambda}'}=\gamma:\alpha.$$

Отсюда опредѣляемъ отношеніе λ': λ' и, принимая во вниманіе, что мы имѣемъ дѣло съ однородными координатами, можемъ положить:

$$\lambda'=-\lambda f(yy),\ \lambda'=\lambda f(xx)+2\lambda f(xy).$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую теорему.

Теорема.—*Если начало вектора xy мы перемѣстимъ въ точку x' прямой xy:*

$$x_1'=\lambda x_1+\lambda y_1, \qquad (1234)$$

то концомъ его будетъ служить точка

$$y_1'=\lambda' x_1+\lambda' y_1, \qquad (1234)$$

гдѣ $\lambda'=-\lambda f(yy)$, $\lambda'=\lambda f(xx)+2\lambda f(xy)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть плоскости, проходящія черезъ ось ротора XY и касательныя къ абсолюту. Если роторъ $X'Y'$ имѣетъ общую ось съ ротором XY и если пучки $\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y'$ проэктивны:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)\overline{\wedge}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y')$$

или, что все равно, ангармоническія отношенія $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)$ и $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y')$ равны:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)=(\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y'), \qquad (16)$$

то роторъ $X'Y'$ мы будемъ считать равнымъ ротору XY:

$$XY=X'Y'$$

Замѣняя роторъ XY ротором $X'Y'$, мы будемъ говорить, что мы поворачиваемъ роторъ XY вокругъ его оси такъ, что его начальная плоскость приходитъ въ положеніе X'. Мы можемъ такимъ образомъ поворачивать роторъ вокругъ его оси, совмѣщая начальную плоскость съ какой угодно плоскостью, проходящей черезъ ось; положеніе конечной плоскости при этомъ опредѣляется условіемъ (16).

Теорема.—*Если начальную плоскость ротора XY мы совмѣстимъ съ плоскостью X', проходящей черезъ ось XY:*

$$X_1'=\lambda X_1+\mu Y_1, \qquad (1234)$$

то конечной плоскостью его будетъ служить плоскость Y':

$$Y_1'=\lambda' X_1+\mu' Y_1 \qquad (1234)$$

гдѣ $\lambda'=-\mu F(YY)$, $\mu'=\lambda F(XX)+2\mu F(XY)$.

31. **Полярный векторъ и роторъ.**—Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ суть точки пересѣченія луча вектора xy съ абсолютомъ, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$—плоскости, проведенныя черезъ ось ротора XY и касательныя къ абсолюту. Если лучъ xy съ осью XY образуютъ взаимныя поляры, такъ что плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ проходятъ соотвѣтственно черезъ точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то векторъ xy и роторъ XY мы будемъ называть взаимно полярными, когда рядъ $\mathfrak{ab}xy$ проэктивенъ съ пучкомъ $\mathfrak{AB}XY$:

$$(\mathfrak{ab}xy)\overline{\wedge}(\mathfrak{AB}XY),$$

или, что все равно, ангармоническія отношенія $(\mathfrak{ab}xy)$ и $(\mathfrak{AB}XY)$ равны:

$$(\mathfrak{ab}xy)=(\mathfrak{AB}XY). \qquad (17)$$

Если роторъ XY поляренъ съ векторомъ xy, то векторъ $x'y'=xy$ и роторъ $X'Y'=XY$ будутъ также взаимно-полярны, ибо лучъ $x'y'$ будетъ поляренъ съ осью $X'Y'$ и изъ условій

$$(\mathfrak{ab}xy)=(\mathfrak{AB}XY)$$
$$(\mathfrak{ab}xy)=(\mathfrak{ab}x'y'),\ (\mathfrak{AB}XY)=(\mathfrak{AB}X'Y') \qquad \S\ 30$$

слѣдуетъ

$$(ab x'y') = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y').$$

Обратно, два ротора XY и $X'Y'$, полярныхъ съ однимъ и тѣмъ же векторомъ xy, будутъ равны, ибо оба имѣютъ общую ось и изъ условій полярности съ xy:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY) = (ab xy) \quad , \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y') = (ab xy)$$

слѣдуетъ

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}X'Y'),$$

условіе ихъ равенства. Также докажемъ, что два вектора, полярныхъ съ однимъ и тѣмъ же роторомъ, равны.

Мы имѣемъ два весьма простыхъ способа построить роторъ полярный съ даннымъ векторомъ и векторъ полярный съ даннымъ роторомъ, пользуясь слѣдующимъ свойствомъ взаимно-полярныхъ вектора и ротора.

1. Если x,y суть полюсы плоскостей X,Y, то векторъ xy будетъ поляренъ съ роторомъ XY. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ лучъ xy будетъ полярой оси XY, и, пользуясь проэктивными свойствами пучка плоскостей $\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY$ и ряда точекъ $ab xy$, которыя служатъ полюсами этихъ плоскостей, мы будемъ имѣть равенство

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY) = (ab xy),$$

изъ котораго слѣдуетъ полярность вектора xy и ротора XY. При указанномъ относительномъ расположеніи точекъ x,y и плоскостей X,Y векторъ xy и роторъ XY мы будемъ называть не только полярными, но и полярно-расположенными.

2. Если x,y суть точки пересѣченія плоскостей X,Y съ полярой оси XY, то векторъ xy и роторъ XY взаимно полярны. Ибо, во-первыхъ, лучъ xy и ось XY взаимно полярны, а во-вторыхъ пучекъ плоскостей $\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY$ перспективенъ съ рядомъ $ab xy$, и мы имѣемъ равенство (17). При указанномъ относительномъ расположеніи точекъ x,y и плоскостей X,Y мы будемъ называть векторъ xy и роторъ XY не только полярными, но и перспективно-расположенными.

Теорема.

Сумма двухъ роторовъ, полярныхъ съ двумя векторами, полярна съ суммой данныхъ векторовъ.

Сумма двухъ векторовъ, полярныхъ съ двумя роторами, полярна съ суммой данныхъ роторовъ.

Пусть o,x,y,z суть полюсы плоскостей O,X,Y,Z; мы знаемъ, что векторы ox,oy,oz будутъ полярны съ роторами OX,OY,OZ и намъ нужно доказать, что одно изъ равенствъ

$$ox+oy=oz,\ OX+OY=OZ$$

влечетъ за собой другое. Докажемъ лѣвую теорему: покажемъ что изъ второго равенства слѣдуетъ первое.

Аналитическое доказательство. — Такъ какъ $OX+OY=OZ$ и плоскости O,X,Y,Z полярны съ точками o,x,y,z, то полагая въ формулахъ (9), (4) и (3) для большей простоты множители пропорціональности σ равными единицѣ, мы имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$$Z_1=F(OY)F(OO)X_1+F(OX)F(OO)Y_1-F(OX)F(OY)O_1, \quad (18)$$

$$X_1=f_1(x),\quad Y_1=f_1(y),\quad Z_1=f_1(z),\quad O_1=f_1(o), \quad (19)$$

$$\Delta x_1=F_1(X),\ \Delta y_1=F_1(Y),\ \Delta z_1=F_1(Z),\ \Delta o_1=F_1(O). \quad (20)$$

Въ силу (19) и (20)

$$F(OX)=F_1(O)X_1+F_2(O)X_2+F_3(O)X_3+F_4(O)X_4=X_o.\Delta,$$
$$X_o=X_1o_1+X_2o_2+X_3o_3+X_4o_4=f(ox);$$

слѣдовательно $F(OX)=\Delta f(ox)$.

Также докажемъ, что

$$F(OY)=\Delta f(oy),\ F(OZ)=\Delta f(oz),\ F(OO)=\Delta f(oo),$$

послѣ чего (18) можетъ быть написано такимъ образомъ

$$Z_1:\Delta^2=f(oy)f(oo)X_1+f(ox)f(oo)Y_1-f(ox)f(oy)O_1. \quad (1234)$$

Пользуясь этими равенствами и (20), получимъ

$$z_1:\Delta^2=f(oy)f(oo)\,x_1+f(ox)f(oo)\,y_1-f(ox)f(oy)o_1, \quad (1234)$$

откуда видно, что $oz=ox+oy$.

Геометрическое доказательство. — Предполагая, что $ox+oy=oz'$, докажемъ, что $oz'=oz$. Припомнимъ съ этою цѣлью, какъ строятся векторъ oz' и роторъ OZ по правиламъ четыреугольника и четырегранника. Конечная плоскость Z ротора OZ представляетъ собой плоскость, проведенную черезъ линіи AY и BX, изъ которыхъ первая есть пересѣченіе плоскости Y съ плоскостью A, проходящей черезъ o и ось OX,

а вторая—плоскости X съ плоскостью B, проходящей черезъ o и ось OY. Чтобы построить векторъ oz', мы опредѣляемъ точки a и b пересѣченія прямыхъ ox и oy съ плоскостью O и проводимъ линіи bx и ay; точка z' находится въ пересѣченіи этихъ линій. Но легко видѣть, что фигура $OXYZAB$ будетъ представлять собой фигуру полярную по отношенію къ фигурѣ $oxyz'ab$ и, слѣдовательно, точка z' будетъ полюсомъ плоскости Z. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ o и x суть полюсы плоскостей O и X, то лучъ ox будетъ поляренъ съ осью OX, и точка a пересѣченія ox съ O будетъ полюсомъ плоскости A, проходящей черезъ OX и точку o. Также b будетъ полюсомъ плоскости B. Поэтому линіи ay и bx будутъ полярны съ линіями AY и BX, и точка z' пересѣченія ay и bx будетъ полюсомъ плоскости Z, проходящей черезъ AY и BX; слѣдовательно точка z' должна совпасть съ точкой z, которая также служитъ полюсомъ плоскости Z, и $oz=oz'=ox+oy$.

Совершенно также доказывается и правая теорема.

32. **Элементарныя операціи и эквивалентныя системы.**— Совокупность нѣсколькихъ векторовъ и роторовъ называется системой. Система можетъ содержать или только векторы, или только роторы, или, наконецъ, и векторы и роторы.

Слѣдующія операціи надъ векторами и роторами системы мы будемъ называть элементарными операціями.

1. Перенесеніе вектора вдоль его луча и поворотъ ротора вокругъ его оси.

2. Замѣна двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало, однимъ, равнымъ ихъ суммѣ. Частнымъ случаемъ этой операціи будетъ исключеніе изъ системы двухъ равныхъ и прямо-противоположныхъ векторовъ, ибо сумма такихъ двухъ векторовъ равняется нулю.

Замѣна двухъ роторовъ съ общей начальной плоскостью однимъ, равнымъ ихъ суммѣ. Частнымъ случаемъ этой операціи будетъ исключеніе изъ системы двухъ равныхъ и прямо-противоположныхъ роторовъ, ибо сумма такихъ двухъ роторовъ равняется нулю.

3. Замѣна одного вектора его двумя составляющими. Не измѣняя системы, мы можемъ присоединить къ ней въ каждой точкѣ пространства векторъ равный нулю; но такой векторъ можно разложить на два равныхъ и прямо-противоположныхъ; поэтому частнымъ случаемъ третьей операціи будетъ присоединеніе къ системѣ двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ векторовъ.

Замѣна одного ротора его двумя составляющими. Не измѣняя системы, мы можемъ всякую плоскость пространства разсматривать какъ двѣ совпадающія плоскости ротора равнаго нулю; но такой роторъ можно разложить на два равныхъ и прямо-противоположныхъ; поэтому частнымъ случаемъ третьей операціи будетъ присоединеніе къ системѣ двухъ равныхъ и прямо-противоположныхъ роторовъ.

4. Замѣна вектора полярнымъ съ нимъ роторомъ и ротора полярнымъ съ нимъ векторомъ. Эту операцію мы будемъ называть операціей поляризированія.

Если данную систему S мы можемъ, примѣняя послѣдовательно одинъ или нѣсколько разъ элементарныя операціи, преобразовать въ систему S_1, то очевидно, что совершая обратныя элементарныя операціи, въ обратномъ порядкѣ, можно систему S_1 преобразовать въ систему S. Двѣ системы S и S_1, которыя могутъ быть преобразованы одна въ другую путемъ элементарныхъ операцій, называются эквивалентными. Чтобы показать, что двѣ системы S и S_1 эквивалентны, будемъ писать такимъ образомъ: $S \equiv S_1$.

Теорема.—*Двѣ системы, эквивалентныя третьей, эквивалентны между собой.*

Если системы S и S_2 эквивалентны системѣ S_1, то это значитъ, что систему S можно преобразовать въ систему S_1, а систему S_1—въ систему S_2 элементарными операціями. Такимъ образомъ систему S, переходя черезъ систему S_1, какъ промежуточную, можно преобразовать элементарными операціями въ S_2; слѣдовательно $S \equiv S_2$.

Всякій разъ, когда мы изслѣдуемъ какое либо преобразованіе аналитическое или геометрическое, основной задачей такого изслѣдованія является разысканіе его инваріантовъ. Въ предыдущихъ параграфахъ мы познакомились съ цѣлымъ рядомъ геометрическихъ построеній, которыя мы назвали теперь элементарными операціями надъ векторами и роторами. Примѣняя ихъ къ какой либо системѣ, мы можемъ преобразовать ее въ новыя системы, и нашей задачей должно быть теперь разысканіе инваріантовъ такого преобразованія. Въ этой главѣ мы займемся разысканіемъ геометрическихъ, а въ слѣдующей—аналитическихъ инваріантовъ.

33. **Компоненты и моменты относительно точки и плоскости.**—Имѣемъ векторъ γ и плоскость A. Перенеся векторъ

вдоль его луча въ новое положеніе oz такъ, чтобы новымъ началомъ служила точка o пересѣченія луча вектора γ съ плоскостью A (см. чертежъ 7), мы будемъ называть проэкцію oy вектора oz на плоскость A и всякій векторъ $\beta=oy$ комоментомъ вектора γ относительно плоскости A. Его мы будемъ означать такимъ образомъ:

$$\text{км}_A(\gamma)$$

Комоментъ вектора относительно плоскости обладаетъ слѣдующими свойствами.

1. Комоменты равныхъ векторовъ относительно одной и той же плоскости равны, иначе говоря комоментъ вектора относительно плоскости не измѣняется, если векторъ мы переносимъ вдоль его луча.

2. Если лучъ вектора $\gamma=oz$ лежитъ въ плоскости A, то $\beta=oy=oz=\gamma$: комоментъ вектора относительно плоскости, проходящей черезъ его лучъ, равняется самому вектору.

3. Если векторъ $\gamma\neq 0$, то $\beta=oy=0$ только тогда, когда лучъ γ перпендикуляренъ къ плоскости A (§ 27). Такимъ образомъ комоментъ вектора относительно плоскости обращается въ нуль только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда векторъ равенъ нулю, во-вторыхъ, когда лучъ вектора перпендикуляренъ къ плоскости.

4. Лучемъ комомента вектора относительно плоскости служитъ ортогональная проэкція луча вектора на плоскость.

Имѣемъ векторъ γ и точку a. Построивъ плоскость A, полярную съ a, и перенеся векторъ γ вдоль его луча въ положеніе oz такъ, чтобы новымъ началомъ была точка o пересѣченія луча γ съ плоскостью A (см. чертежъ 7), мы будемъ называть проэкцію ox вектора oz на линію oa комоментомъ вектора γ относительно точки a. Всякій векторъ α равный ox мы будемъ считать также комоментомъ γ относительно точки a; но обыкновенно мы будемъ принимать за начало комомента вектора относительно точки эту самую точку. Комоментъ вектора γ относительно точки a мы будемъ означать такимъ образомъ:

$$\text{км}_a(\gamma).$$

Комоментъ вектора относительно точки обладаетъ слѣдующими свойствами.

1. Комоменты равныхъ векторовъ относительно одной и той же точки равны, иначе говоря комоментъ вектора отно-

сительно точки не измѣняется, если векторъ мы переносимъ вдоль его луча.

2. Если лучъ вектора $\gamma = oz$ проходитъ черезъ точку a, то $\alpha = ox = oz = \gamma$: комоментъ вектора относительно точки, находящейся на лучѣ, равняется самому вектору.

3. Если векторъ $\gamma \neq 0$, то $\alpha = ox = 0$ только тогда, когда лучъ γ лежитъ въ плоскости A и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ точкѣ a. Такимъ образомъ комоментъ вектора относительно точки обращается въ нуль только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда векторъ равенъ нулю, во-вторыхъ, когда лучъ вектора перпендикуляренъ къ точкѣ.

4. Лучемъ комомента вектора относительно точки служитъ ортогональная проэкція луча вектора на точку.

Имѣемъ роторъ Г и точку a. Повернувъ роторъ вокругъ его оси въ новое положеніе OZ такъ, чтобы новой начальной плоскостью была плоскость O, проходящая черезъ ось ротора и точку a, мы будемъ называть проэкцію OY ротора OZ на точку a и всякій роторъ Я равный OY комоментомъ ротора Г относительно точки a. Его мы будемъ означать такимъ образомъ:

$$\text{км}_a(\Gamma).$$

Комоментъ ротора относительно точки обладаетъ слѣдующими свойствами.

1. Комоменты равныхъ роторовъ относительно одной и той же точки равны, иначе говоря комоментъ ротора относительно точки не измѣняется, если роторъ мы поворачиваемъ вокругъ оси.

2. Комоментъ ротора относительно точки, находящейся на его оси, равняется самому ротору.

3. Комоментъ ротора относительно точки равняется нулю только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ когда роторъ равенъ нулю, во-вторыхъ, когда ось ротора перпендикулярна къ точкѣ.

4. Осью комомента ротора относительно точки служитъ ортогональная проэкція оси ротора на точку.

Имѣемъ роторъ Г и плоскость A. Построивъ a полюсъ плоскости A и повернувъ роторъ Г въ положеніе OZ такъ, чтобы начальной плоскостью была плоскость O, проходящая черезъ ось Г и точку a, иначе говоря плоскость, проходящая черезъ ось Г и перпендикулярная къ A, мы будемъ называть проэкцію OX ротора OZ на линію AO комоментомъ ротора Г относительно плоскости A. Всякій роторъ Я равный OX мы

будемъ считать также комоментомъ ротора Г относительно плоскости A; но обыкновенно мы будемъ принимать за начальную плоскость комомента ротора относительно какой нибудь плоскости эту самую плоскость. Комоментъ ротора Г относительно плоскости A мы будемъ означать такимъ образомъ:

$$\text{км}_A(\Gamma).$$

Комоментъ ротора относительно плоскости обладаетъ слѣдующими свойствами.

1. Комоменты равныхъ роторовъ относительно одной и той же плоскости равны, иначе говоря комоментъ ротора относительно плоскости не измѣняется, если роторъ мы поворачиваемъ вокругъ его оси.

2. Комоментъ ротора относительно плоскости, проходящей черезъ ось, равняется самому ротору.

3. Комоментъ ротора относительно плоскости равняется нулю только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ когда роторъ равенъ нулю, во-вторыхъ, когда его ось перпендикулярна къ плоскости.

4. Осью комомента ротора относительно плоскости служитъ ортогональная проэкція оси ротора на плоскость.

Моментомъ вектора относительно точки или плоскости называется комоментъ ротора полярнаго съ векторомъ относительно той же точки или плоскости.

Моментомъ ротора относительно точки или плоскости называется комоментъ вектора полярнаго съ роторомъ относительно той же точки или плоскости.

Моменты вектора γ и ротора Г относительно точки a и плоскости A мы будемъ означать такимъ образомъ:

$$\text{мм}_a(\gamma),\ \text{мм}_A(\gamma),\ \text{мм}_a(\Gamma),\ \text{мм}_A(\Gamma).$$

Мы знаемъ, что комоменты для вектора суть векторы, для ротора—роторы, слѣдовательно моменты вектора суть роторы, а ротора—векторы. Такимъ образомъ комоменты вектора и ротора одноименны съ ними, а моменты—разноименны.

Моменты обладаютъ слѣдующими свойствами.

1. Моменты равныхъ векторовъ (роторовъ) относительно одной и той же точки или плоскости равны, иначе говоря моменты вектора (ротора) относительно точки или плоскости не измѣняются, если векторъ (роторъ) мы переносимъ вдоль его луча (поворачиваемъ вокругъ его оси).

2. Моментъ вектора (ротора) относительно точки или плоскости, перпендикулярной къ лучу вектора (оси ротора), равняется ротору (вектору), полярному съ векторомъ (ротороmъ).

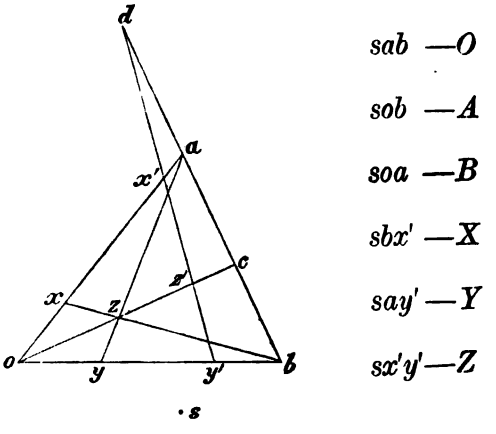
3. Моментъ вектора (ротора) относительно точки или плоскости равняется нулю только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда векторъ (роторъ) равенъ нулю, во-вторыхъ, когда точка лежитъ на лучѣ вектора (оси ротора), а плоскость проходитъ черезъ лучъ вектора (ось ротора).

34. **Свойства комоментовъ и моментовъ.**—Намъ достаточно изслѣдовать только свойства комоментовъ и моментовъ вектора, ибо изъ нихъ по принципу двойственности легко выводятся и свойства комоментовъ и моментовъ ротора.

1. Пусть a есть полюсъ плоскости A. Чтобы построить комоменты вектора γ относительно точки a и плоскости A, мы должны, какъ было объяснено въ предыдущемъ параграфѣ, перенести векторъ γ вдоль его луча въ новое положеніе oz такъ, чтобы новымъ началомъ служила точка o пересѣченія луча вектора γ съ плоскостью A. Соединивъ a съ z и продолживъ линію az до пересѣченія въ точкѣ y съ плоскостью A, мы построимъ векторъ oy—комоментъ вектора $\gamma=oz$ относительно плоскости A; векторъ β, равный oy, будетъ также комоментомъ γ относительно A. Такъ какъ точка o лежитъ въ плоскости A, то плоскость O, полярная съ точкой o, пройдетъ черезъ точку a, линія AO (на чертежѣ sb) будетъ полярой линіи ao, плоскость sbz—перпендикулярной къ ao, и потому, если черезъ x назовемъ пересѣченіе этой плоскости съ линіей ao, то векторъ ox будетъ проэкціей oz на линію ao, а вмѣстѣ съ тѣмъ и комоментомъ вектора γ' относительно точки a; векторъ α равный ox будетъ также комоментомъ γ относительно a. Построимъ плоскости B,X,Y,Z полярныя съ точками b,x,y,z. Такъ какъ точки o,x,y,z,a,b всѣ лежатъ въ одной плоскости, то плоскости O,X,Y,Z,A,B всѣ пройдутъ черезъ полюсъ этой плоскости—точку s. Плоскости O,X,A всѣ пройдутъ черезъ линію sb, ибо полюсы ихъ лежатъ на одной прямой oxa; на томъ же основаніи плоскости B,Y,O пройдутъ черезъ линію sa, плоскости A,Y,Z черезъ линію sx' и плоскости X,B,Z черезъ линію sy'. Конечная плоскость X ротора OX проходитъ черезъ линію sb и точку x', въ которой линія oa, поляра sb, пересѣкается съ плоскостью Z; поэтому роторъ OX представляетъ собой проэкцію OZ на линію sb пересѣченія плоскостей O и A. Но плоскость O перпендикулярна къ плоскости A, слѣдовательно роторъ $\Gamma=OX$ будетъ комоментомъ ротора $\Gamma=OZ$ относительно плоскости A. Далѣе,

такъ какъ плоскость Y проходитъ черезъ a и линію sy' пересѣченія плоскостей Z и A, то роторъ OY будетъ проэкціей ротора OZ на точку a, а роторъ $\mathfrak{B}=OY$ комоментомъ ротора $\Gamma=OZ$ относительно точки a. Такимъ образомъ роторы $\mathfrak{A}=OX$ и $\mathfrak{B}=OY$, полярные съ векторами $\alpha=ox$ и $\beta=oy$, представляютъ собой комоменты ротора $\Gamma=OZ$, полярнаго съ векторомъ $\gamma=oz$, относительно плоскости A и точки a соотвѣтственно. Мы можемъ поэтому разсматривать $\alpha=ox$ и $\mathfrak{B}=OY$ какъ моменты ротора $\Gamma=OZ$ и вектора $\gamma=oz$ относительно точки a, а $\beta=oy$ и $\mathfrak{A}=OX$ какъ моменты ротора $\Gamma=OZ$ и вектора $\gamma=oz$ относительно плоскости A. Итакъ мы доказали слѣдующую теорему.

Чертежъ 7.



Теорема I.—*Комоментъ вектора (ротора) относительно плоскости и моментъ вектора (ротора) относительно полюса плоскости взаимно полярны. Комоментъ вектора (ротора) относительно точки и моментъ его относительно плоскости, полярной съ точкой, взаимно полярны.*

2. Такъ какъ роторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ полярны съ векторами α и β, то системы

$$(\alpha,\beta),\ (\mathfrak{A},\beta),\ (\alpha,\mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \qquad (21)$$

могутъ быть преобразованы одна въ другую операціей поляризированія и, значитъ, между собой эквивалентны. Припоминая правило четыреугольника, изъ чертежа мы видимъ, что $oz=ox+oy$; поэтому перенеся векторъ γ въ положеніе oz, мы можемъ третьей элементарной операціей (§ 32) преобра-

зовать этотъ послѣдній векторъ въ систему (ox,oy), которая въ свою очередь при помощи первой операціи преобразуется въ систему (α,β). Векторъ γ эквивалентенъ, слѣдовательно, съ системой (α,β), а по теоремѣ § 32, и съ каждой изъ системъ (21). Итакъ мы доказали слѣдующую теорему.

Теорема II.—*Векторъ (роторъ) эквивалентенъ: 1) или комоментамъ его относительно точки и полярной съ ней плоскости; 2) или комоменту и моменту относительно точки; 3) или комоменту и моменту относительно плоскости; 4) или моментамъ относительно точки и полярной съ ней плоскости.*

3. Такъ какъ линіи oa,ob,oc, лучи векторовъ α,β,γ, пересѣкаютъ взаимныя поляры ab и AB, то онѣ перпендикулярны къ линіямъ ab и AB. Линія ao перпендикулярна слѣдовательно къ ab, перпендикуляру опущенному изъ точки a на лучъ вектора γ, а линія ob перпендикулярна линіи AB (os), проведенной въ плоскости A и перпендикулярной къ лучу γ. Такимъ образомъ лучъ (ось) комомента вектора (ротора) относительно точки проходитъ черезъ точку, лежитъ въ одной плоскости съ лучемъ вектора (осью ротора) и перпендикуляренъ къ перпендикуляру опущенному изъ точки на лучъ вектора (ось ротора); лучъ комомента вектора (ротора) относительно плоскости лежитъ въ этой плоскости, пересѣкается съ лучемъ вектора (осью ротора) и перпендикуляренъ къ линіи проведенной въ плоскости и перпендикулярной къ лучу вектора (оси ротора).

4. Такъ какъ линіи ox,oy,oz поляры осей OX,OY,OZ, то векторы ax',ay',az' будутъ полярны съ роторами OX,OY,OZ, которые въ свою очередь полярны съ векторами ox,oy,oz; слѣдовательно (§ 31)

$$\alpha=ox=ax',\ \beta=oy=by',\ \gamma=oz=cz',$$

и векторы ax' и by' представляютъ собой комоменты вектора γ относительно точки a и плоскости A. Замѣчая, что линія $x'y'$ пересѣкаетъ взаимныя поляры oz и OZ и, слѣдовательно, перпендикулярна къ oz, мы видимъ, что комоментъ вектора относительно точки и комоментъ ротора относительно плоскости можно построитъ слѣдующимъ образомъ.

Чтобы построить комоментъ вектора γ относительно точки a, опускаемъ изъ a перпендикуляръ ac на лучъ γ и переносимъ векторъ γ въ положеніе cz', такъ чтобы началомъ

его была подошва перпендикуляра ac. Въ точкахъ a и z', въ плоскости, проходящей черезъ a и лучъ γ, возставляемъ перпендикуляры ax' и $z'd$ къ линіямъ ac и γ. Если x'—точка ихъ пересѣченія, то векторъ ax' и будетъ комоментомъ вектора $\gamma=oz$ относительно точки a.

Чтобы построить комоментъ ротора $\Gamma=OZ$ относительно плоскости A, проводимъ въ плоскости A перпендикуляръ AB къ оси Γ и поворачиваемъ Γ въ положеніе CZ' такъ, чтобы начальной плоскостью для него служила плоскость C, проходящая черезъ AB и ось Γ. Въ плоскостяхъ A и Z' черезъ точку пересѣченія A съ осью Γ проводимъ перпендикуляры AX' и $Z'D$ къ линіямъ AB и Γ. Если X'—плоскость, проходящая черезъ эти перпендикуляры, то роторъ AX' и будетъ комоментомъ ротора $\Gamma=OZ$ относительно плоскости A.

5. Ось ротора $\mathfrak{B}=OY$ проходитъ черезъ s—полюсъ плоскости aoz и, слѣдовательно, перпендикулярна къ этой плоскости; ось ротора $\mathfrak{A}=OX$ лежитъ въ плоскости O и, слѣдовательно, перпендикулярна къ точкѣ o. Такимъ образомъ ось (лучъ) момента вектора (ротора) относительно точки перпендикулярна (перпендикуляренъ) къ плоскости проведенной черезъ точку и лучъ вектора (ось ротора), а ось (лучъ) момента вектора (ротора) относительно плоскости перпендикулярна (перпендикуляренъ) къ точкѣ пересѣченія луча вектора (оси ротора) съ плоскостью.

6. Такъ какъ векторъ $ax'=ox=\alpha$ представляетъ моментъ ротора $\Gamma=OZ$ относительно точки a, то мы видимъ, что моментъ ротора относительно точки и моментъ вектора относительно плоскости можно построить слѣдующимъ образомъ.

Для построенія момента ротора Γ относительно точки a поворачиваемъ его въ такое положеніе OZ, чтобы начальная плоскость его O прошла черезъ точку a. Проводимъ черезъ a линію ao перпендикулярную къ плоскости O и опредѣляемъ точку x' пересѣченія этой линіи съ плоскостью Z: векторъ $\alpha=ax'$ и будетъ моментомъ $\Gamma=OZ$ относительно a.

Для построенія момента вектора γ относительно плоскости A переносимъ векторъ въ такое положеніе oz, чтобы начало его o пришло въ плоскость A. Проводимъ въ плоскости A линію AO перпендикулярную къ точкѣ o и строимъ плоскость X', проходящую черезъ эту линію и точку z: роторъ AX' и будетъ моментомъ вектора $\gamma=oz$ относительно плоскости A.

7. Отмѣтимъ нѣкоторыя особенности, съ которыми намъ приходится встрѣчаться при построеніи комоментовъ и моментовъ, когда абсолютъ вырождается въ коническое сѣченіе или

конусъ. Если абсолютъ обращается въ коническое сѣченіе S, лежащее въ плоскости O (безконечно-удаленная плоскость), то плоскости полярныя съ точками, не лежащими на плоскости O, всѣ совпадаютъ съ плоскостью O, полюсомъ плоскости X служитъ полюсъ линіи XO относительно S, полярой линіи α служитъ поляра точки пересѣченія α съ O относительно S. Принимая это во вниманіе, при построеніи комоментовъ и моментовъ мы не встрѣтимъ никакихъ затрудненій, если для построенія комомента вектора относительно точки, момента вектора относительно плоскости и момента ротора относительно точки мы будемъ пользоваться данными выше въ пунктахъ 4 и 6 правилами. При этихъ построеніяхъ мы замѣтимъ слѣдующія свойства комоментовъ и моментовъ.

Лучемъ (осью) комомента вектора (ротора) α относительно точки x служитъ проэкція луча (оси) α на точку x изъ плоскости O, т. е. линія соединяющая точку x съ точкой пересѣченія луча (оси) α и плоскости O: лучи (оси) комоментовъ вектора (ротора) α относительно различныхъ точекъ пространства всѣ проходятъ черезъ одну и ту же точку плоскости O.

Осью (лучемъ) момента всякаго вектора (ротора) относительно плоскости X служитъ линія пересѣченія плоскостей X и O, ибо, какъ доказано въ пунктѣ 5, ось (лучъ) момента вектора (ротора) относительно плоскости перпендикулярна (перпендикуляренъ) къ точкѣ пересѣченія луча вектора (оси ротора) съ этой плоскостью.

Моментъ вектора относительно точки равняется нулю. Чтобы убѣдиться въ этомъ, построимъ моментъ какого нибудь вектора α относительно точки y (см. чертежъ). Проведя черезъ y и линію sb, поляру луча α, плоскость syb, перенесемъ векторъ α въ такое положеніе ox, чтобы началомъ ему служила точка o пересѣченія луча α съ плоскостью sby. Роторъ $osbx$ будетъ поляренъ и перспективно расположенъ съ векторомъ ox и моментъ вектора $\alpha=ox$ относительно точки y будетъ равняться проэкціи ротора $osbx$ на точку y. Но эта проэкція равняется нулю, ибо плоскость O, полярная съ y, проходитъ черезъ ось sb ротора $osbx$ (см. § 27).

Изъ сказаннаго, по принципу двойственности, заключаемъ: если абсолютъ вырождается въ конусъ съ вершиной въ точкѣ o (безконечно удаленная точка), то лучи (оси) комоментовъ вектора (ротора) относительно плоскостей всѣ лежатъ въ одной плоскости, проходящей черезъ лучъ вектора (ось ротора) и точку o, осью (лучемъ) момента всякаго вектора (ротора) относительно точки x служитъ линія ox, *моментъ ротора относительно плоскости равняется нулю.*

35. **Третья основная теорема.**—Посмотримъ, какимъ образомъ мы можемъ вычисленіемъ опредѣлить комоменты вектора и ротора относительно точки и плоскости. Пусть a и A суть взаимно перпендикулярныя точка и плоскость, такъ что ихъ координаты связаны между собой ур.

$$A_1 = f_1(a). \qquad (1234)$$

Чтобы опредѣлить комоментъ вектора ox относительно точки a и плоскости A, мы должны, какъ было объяснено въ § 33, перенести векторъ ox вдоль его луча такъ, чтобы началомъ ему служила точка o' пересѣченія ox съ плоскостью A. Координаты точки o' будутъ

$$o_1' = \lambda o_1 + \mu x_1, \qquad (1234)$$

причемъ λ и μ, такъ какъ точка o' лежитъ въ плоскости A, будутъ удовлетворять ур.

$$A_o' = \lambda A_o + \mu A_x = \lambda f(ao) + \mu f(ax) = 0,$$

откуда $$\lambda = f(ax), \quad \mu = -f(ao).$$

Конецъ вектора ox тогда перемѣстится въ точку x'

$$x_1' = \lambda' o_1 + \mu' x_1, \qquad (1234)$$

гдѣ (теорема § 30) $\lambda' = -\mu f(xx)$, $\mu' = \lambda f(oo) + 2\mu f(ox)$.

Обращаясь сначала къ опредѣленію комомента вектора ox относительно точки a, мы должны построить проэкцію вектора $o'x'$ на линію ao' и съ этою цѣлью мы должны черезъ точку x' провести плоскость перпендикулярную къ ao'. Всѣ плоскости перпендикулярныя къ ao' проходятъ черезъ поляру этой линіи; если X есть плоскость полярная съ точкой x

такъ что $$X_1 = f_1(x), \qquad (1234)$$

то плоскость полярная съ точкой o' очевидно будетъ имѣть такія координаты

$$\lambda O_1 + \mu X_1.$$

Пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью A будетъ полярой линіи ao', и всякая плоскость, проходящая черезъ это пересѣченіе, т. е. всякая плоскость, координаты которой имѣютъ видъ

$$U_1 = \alpha(\lambda O_1 + \mu X_1) + \beta A_1, \qquad (1234)$$

гдѣ α и β произвольныя постоянныя будетъ перпендикулярна къ ao'. Изъ всѣхъ этихъ плоскостей мы должны выбрать ту, которая проходитъ черезъ x', для чего величины α и β мы должны опредѣлить такъ, чтобы

$$U_{x'}=\sum_i[\alpha(\lambda O_i+\mu X_i)+\beta A_i](\lambda' o_i+\mu' x_i)=0,$$

отсюда $$\alpha=-1,\ \beta=f(ox),$$

и слѣдовательно

$$U_1=f(oa)X_1-f(ax)O_1+f(ox)A_1. \qquad (1234)$$

Точка x'' пересѣченія плоскости U съ линіей ao' и будетъ концомъ вектора

$$o'x''=\text{км}_a(ox).$$

Не трудно было бы вычислить координаты точки x''. Мы можемъ однако избѣжать этихъ вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая координаты плоскости U, легко видѣть, что координаты полюса u этой плоскости таковы

$$u_1=f(oa)x_1-f(ax)o_1+f(ox)a_1. \qquad (1234)$$

Но роторъ AU съ одной стороны поляренъ и полярно расположенъ съ векторомъ au, а съ другой поляренъ и перспективенъ съ векторомъ $o'x''$, ибо плоскости O и U проходятъ черезъ поляру линіи ao', на которой лежитъ векторъ $o'x''$, и кромѣ того плоскость U проходитъ черезъ x'', а плоскость A черезъ o'. Векторы au и $o'x''$, будучи полярны съ однимъ и тѣмъ же ротором AU, равны между собой (§ 31); такимъ образомъ

$$au=o'x''=\text{км}_a(ox),$$

и мы имѣемъ слѣдующую теорему.

Теорема I.

Комомент вектора ox относительно точки a равняется вектору au, конецъ котораго имѣетъ координаты, опредѣляемыя по формуламъ

$$u_1=f(oa)x_1-f(ax)o_1+f(ox)a_1. \qquad (1234)\ (22)$$

Комомент ротора OX относительно плоскости A равняется ротору AU, конечная плоскость котораго имѣетъ координаты, опредѣляемыя по формуламъ

$$U_1=F(OA)X_1-F(AX)O_1+F(OX)A_1. \qquad (1234)\ (22)$$

Переходимъ теперь къ вычисленію комомента вектора ox относительно плоскости A. Линія ax', соединяющая a съ x' перпендикулярна къ A и точка x_{II} пересѣченія ея съ этой плоскостью служитъ концомъ вектора $o'x_{II}=\text{км}_A(ox)$. Принимая во вниманіе, что точка x_{II} лежитъ съ одной стороны на линіи ax', а съ другой въ плоскости A, мы находимъ для ея координатъ выраженія

$$x_{III}=(\lambda\mu'-\lambda'\mu)a_1-f(aa)(\lambda'o_1+\mu'x_1). \qquad (1234)\ (23)$$

Если векторъ $o'x_{II}$ мы перенесемъ вдоль его луча такъ, чтобы началомъ ему служила точка

$$o_1f(aa)-a_1f(oa) \qquad (1234)$$

пересѣченія линіи ao съ плоскостью A, иначе говоря подошва перпендикуляра, опущеннаго изъ точки o на плоскость A, то пользуясь теоремой § 30, докажемъ, что конецъ его перемѣстится въ точку съ такими координатами:

$$f(oa)[f(oa)x_1-f(ax)o_1]-f(oo)[f(aa)x_1-f(ox)a_1]. \qquad (24)$$

Мы опускаемъ здѣсь всѣ подробности вычисленій, такъ какъ въ дальнѣйшемъ изложеніи намъ не придется пользоваться формулами (23) и (24). Изъ этихъ формулъ помощью принципа двойственности не трудно получить формулы для комомента ротора относительно точки.

Воспользуемся теоремой I для доказательства слѣдующей третьей основной теоремы.

Теорема II. (Основная теорема III).

Комомент суммы двух векторов относительно точки равняется сумме комоментов слагаемых векторов относительно той же точки.

Момент суммы двух роторов относительно точки равняется сумме моментов слагаемых роторов относительно той же точки.

Комомент суммы двух роторов относительно плоскости равняется сумме комоментов слагаемых роторов относительно той же плоскости.

Момент суммы двух векторов относительно плоскости равняется сумме моментов слагаемых векторов относительно той же плоскости.

Означимъ черезъ ox,oy,oz векторы съ общимъ началомъ o, черезъ OX,OY,OZ—роторы съ общей начальной плоскостью O,

черезъ a—какую нибудь точку и черезъ A—какую нибудь плоскость. Теорема заключается въ томъ, что

$$\text{км}_a(oz)=\text{км}_a(ox)+\text{км}_a(oy),\quad \text{км}_A(OZ)=\text{км}_A(OX)+\text{км}_A(OY),$$
$$\text{мм}_A(oz)=\text{мм}_A(ox)+\text{мм}_A(oy),\quad \text{мм}_a(OZ)=\text{мм}_a(OX)+\text{мм}_a(OY),$$

если

$$oz=ox+oy \text{ и } OZ=OX+OY. \tag{25}$$

Предположивъ, что роторы OX,OY,OZ полярны съ векторами ox,oy,oz, мы имѣемъ

$$\text{мм}_A(ox)=\text{км}_A(OX),\quad \text{мм}_A(oy)=\text{км}_A(OY),\quad \text{мм}_A(oz)=\text{км}_A(OZ),$$
$$\text{км}_a(ox)=\text{мм}_a(OX),\quad \text{км}_a(oy)=\text{мм}_a(OY),\quad \text{км}_a(oz)=\text{мм}_a(OZ).$$

Припоминая кромѣ того, что одно изъ равенствъ (25) влечетъ за собой другое (§ 31), мы видимъ, что нижнія теоремы легко выводятся изъ верхнихъ. Съ другой стороны теоремы, находящіяся въ правой колоннѣ, вытекаютъ изъ теоремъ лѣвой по принципу двойственности, такъ что изъ четырехъ теоремъ достаточно доказать только одну, напримѣръ лѣвую верхнюю.

Итакъ пусть
$$oz=ox+oy \tag{26}$$
$$au=\text{км}_a(ox),\ av=\text{км}_a(oy),\ aw=\text{км}_a(oz); \tag{27}$$

мы должны доказать, что

$$au+av=aw.$$

Изъ условій (26) и (27), по формуламъ (22) и (7), мы имѣемъ слѣдующія соотношенія между координатами точекъ o,x,y,z,a,u,v,w:

$$z_1=f(oy)f(oo)x_1+f(ox)f(oo)y_1-f(ox)f(oy)o_1, \quad (1234) \tag{28}$$

$$\begin{aligned} u_1&=f(ao)x_1-f(ax)o_1+f(ox)a_1,\\ v_1&=f(ao)y_1-f(ay)o_1+f(oy)a_1, \quad (1234)\\ w_1&=f(ao)z_1-f(az)o_1+f(oz)a_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Подставимъ во вторую часть послѣдняго равенства вмѣсто z_1,z_2,z_3,z_4 ихъ выраженія (28). Чтобы облегчить при этомъ вычисленія мы замѣтимъ слѣдующее: такъ какъ w_1 линейная и однородная функція отъ z_1,z_2,z_3,z_4, то очевидно, что резуль-

татъ подстановки будетъ равняться суммѣ результатовъ, которые мы получимъ, подставляя въ w_1 отдѣльно каждый изъ трехъ членовъ z_1,z_2,z_3,z_4. Послѣ подстановки въ w_1 первыхъ членовъ z_1,z_2,z_3,z_4, содержащихъ множители x_1,x_2,x_3,x_4, мы получаемъ, если примемъ во вниманіе первое изъ равенствъ (29)

$$f(oo)f(oy)u_1;$$

подстановка вторыхъ членовъ z_1,z_2,z_3,z_4, содержащихъ y_1,y_2,y_3,y_4, даетъ въ силу второго изъ (29)

$$f(oo)f(ox)v_1;$$

наконецъ, послѣ подстановки третьихъ членовъ z_1,z_2,z_3,z_4 имѣемъ

$$-f(ox)f(oy)f(oo)a_1.$$

Такимъ образомъ

$$w_1=f(oo)f(oy)u_1+f(oo)f(ox)v_1-f(oo)f(ox)(oy)a_1. \qquad (1234)$$

Но въ силу (29)

$$f(au)=f(aa)f(ox),\ f(av)=f(aa)f(oy),$$

а потому

$$\sigma w_1=f(aa)f(av)u_1+f(aa)f au)v_1-f(au)f(av)a_1, \qquad (1234)$$

гдѣ $\sigma=f^2(aa)/f(oo)$ множитель пропорціональности. Сравнивая эти соотношенія между координатами точекъ a,u,v,w съ формулами (7), которыми опредѣляется сумма двухъ векторовъ, мы заключаемъ, что

$$au+av=aw,$$

что и требовалось доказать.

36. **Главный векторъ для точки и главный роторъ для плоскости.**—Главнымъ векторомъ системы, которая въ общемъ случаѣ состоитъ изъ векторовъ и роторовъ, для (относительно) какой нибудь точки называется сумма комоментовъ векторовъ системы и моментовъ роторовъ системы относительно этой точки. Такимъ образомъ главный векторъ системы S, состоя-

щей изъ векторовъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ и роторовъ $Я_1, Я_2, \ldots$, для точки o равняется

$$\sum_i \text{км}_o(\alpha_i) + \sum_k \text{мм}_o(Я_k). \qquad (30)$$

Главный векторъ системы для точки называется комоментомъ ея относительно той же точки, если система состоитъ только изъ векторовъ, и моментомъ, если она состоитъ только изъ роторовъ.

Главнымъ роторомъ системы, которая въ общемъ случаѣ состоитъ изъ векторовъ и роторовъ, для (относительно) какой нибудь плоскости называется сумма моментовъ векторовъ системы и комоментовъ роторовъ системы относительно этой плоскости. Такимъ образомъ главный роторъ системы S для плоскости O равняется

$$\sum_i \text{мм}_O(\alpha_i) + \sum_k \text{км}_O(Я_k). \qquad (31)$$

Главный роторъ системы для плоскости называется комоментомъ ея относительно той же плоскости, если система состоитъ только изъ роторовъ, и моментомъ, если она состоитъ только изъ векторовъ.

Если плоскость O полярна съ точкой o, то

$$\text{км}_o(\alpha_i),\ (i=1,2,\ldots),\quad \text{мм}_o(Я_k),\ (k=1,2,\ldots),$$

соотвѣтственно полярны (§ 34) съ

$$\text{мм}_O(\alpha_i),\ (i=1,2,\ldots),\quad \text{км}_O(Я_k),\ (k=1,2,\ldots).$$

Въ этомъ случаѣ всѣ слагаемыя суммы (30) полярны съ слагаемыми суммы (31), а потому и сами суммы (теорема § 31) полярны. Такимъ образомъ главный векторъ системы для какой нибудь точки и главный роторъ ея для плоскости полярной съ точкой взаимно полярны.

Теорема.

Если двѣ системы эквивалентны, то главные векторы ихъ для одной и той же точки равны.

Если двѣ системы эквивалентны, то главные роторы ихъ для одной и той же плоскости равны.

Пусть мы имѣемъ систему S, состоящую изъ векторовъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и роторовъ $Я_1, Я_2, \ldots$. Для доказательства лѣвой

теоремы разсмотримъ какъ вліяютъ элементарныя операціи на главный векторъ системы для какой нибудь точки o:

$$\sum_i \text{км}_o(\alpha_i) + \sum_k \text{мм}_o(\text{Я}_k). \qquad (30')$$

Обращаясь сначала къ разсмотрѣнію элементарныхъ операцій надъ векторами, легко видѣть, что первая элементарная операція ничего не измѣняетъ въ суммѣ (30'), ибо въ эту сумму входятъ комоменты векторовъ системы, а комоментъ вектора не зависитъ отъ положенія вектора на его лучѣ и не измѣняется съ перемѣщеніемъ вектора вдоль его луча (§ 32). Чтобы видѣть вліяніе второй элементарной операціи на главный векторъ системы, предположимъ, что въ системѣ есть два вектора α_1 и α_2 съ общимъ началомъ. Если векторы α_1 и α_2 мы замѣнимъ однимъ векторомъ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, то въ первой суммѣ (30') два члена имъ соотвѣтствующіе

$$\text{км}_o(\alpha_1) + \text{км}_o(\alpha_2)$$

замѣнятся однимъ $\text{км}_o(\alpha)$. Но такъ какъ по теоремѣ II предыдущаго параграфа

$$\text{км}_o(\alpha) = \text{км}_o(\alpha_1) + \text{км}_o(\alpha_2),$$

то вторая элементарная операція измѣнитъ только видъ первой суммы, но не повліяетъ на результатъ суммированія и на главный векторъ системы. Если, обратно, разложивъ векторъ α_1 на два составляющихъ α' и α'', замѣнимъ его этими послѣдними, то въ первой суммѣ одинъ членъ $\text{км}_o(\alpha_1)$ замѣнится двумя $\text{км}_o(\alpha')$, $\text{км}_o(\alpha'')$, но значеніе суммы отъ этого не измѣнится, ибо по упомянутой теоремѣ

$$\text{км}_o(\alpha_1) = \text{км}_o(\alpha') + \text{км}_o(\alpha'').$$

Замѣняя, наконецъ, векторъ α_1 полярнымъ съ нимъ роторомъ Я, мы должны исключить изъ первой суммы членъ $\text{км}_o(\alpha_1)$ и присоединить ко второй членъ $\text{мм}_o(\text{Я})$. Такъ какъ (§ 33)

$$\text{км}_o(\alpha_1) = \text{мм}_o(\text{Я}),$$

то такая замѣна отразится только на порядкѣ членовъ суммы (30'), но не измѣнитъ самой суммы.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы покажемъ, что ни одна изъ элементарныхъ операцій надъ роторами системы

не вліяетъ на главный ея векторъ, ибо первая элементарная операція ничего не измѣняетъ въ суммѣ (30′), вторая—сводится къ замѣнѣ двухъ членовъ второй суммы однимъ, равнымъ суммѣ замѣняемыхъ, третья—къ замѣнѣ одного члена двумя, суммѣ которыхъ онъ равенъ, и, наконецъ, четвертая къ переносу членовъ второй суммы въ первую.

Такимъ образомъ ни одна изъ элементарныхъ операцій не вліяетъ на главный векторъ системы для точки, онъ остается поэтому безъ перемѣнны и послѣ цѣлаго ряда такихъ операцій, которыя данную систему S преобразуютъ въ эквивалентную ей систему S_1.

Совершенно также доказывается и правая теорема.

Частные случаи.—Въ частномъ случаѣ, когда системы состоятъ только изъ векторовъ или только изъ роторовъ, теоремы обращаются въ слѣдующія.

Если двѣ системы векторовъ эквивалентны, то комоменты ихъ относительно одной и той же точки равны.

Если двѣ системы роторовъ эквивалентны, то моменты ихъ относительно одной и той же точки равны.

Если двѣ системы роторовъ эквивалентны, то комоменты ихъ относительно одной и той же плоскости равны.

Если двѣ системы векторовъ эквивалентны, то моменты ихъ относительно одной и той же плоскости равны.

37. Главный векторъ для плоскости и главный роторъ для точки.

Лемма.

Система векторовъ, лучи которыхъ лежатъ въ одной плоскости, эквивалентна одному вполнѣ опредѣленному вектору, лежащему въ той же плоскости.

Система роторовъ, оси которыхъ проходятъ черезъ одну точку, эквивалентна одному вполнѣ опредѣленному ротору съ осью, проходящей черезъ ту же точку.

Пусть мы имѣемъ плоскую систему векторовъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. т. е. систему векторовъ, лучи которыхъ всѣ лежатъ въ одной плоскости. Всегда можно два вектора, лежащихъ въ одной плоскости, преобразовать въ одинъ имъ эквивалентный: стоитъ только перенести начала векторовъ въ точку пересѣченія ихъ лучей, построить сумму векторовъ и замѣнить ихъ этой послѣдней. Такимъ образомъ векторы α_1 и α_2 мы можемъ замѣнить векторомъ β_1 имъ эквивалентнымъ, векторы β_1 и α_3—векторомъ β_2, векторы β_2 и α_4—векторомъ β_3 и т. д. Въ результатѣ этого ряда элементарныхъ операцій, соединяя послѣдо-

вательно два вектора въ одинъ имъ эквивалентный, мы получимъ одинъ векторъ, лежащій въ плоскости системы и эквивалентный всей системѣ. Итакъ всякая плоская система эквивалентна одному вектору. Остается доказать, что этотъ послѣдній не зависитъ отъ послѣдовательности элементарныхъ операцій, служащихъ для его построенія, иначе говоря доказать, что векторъ β необходимо равняется вектору β', если какъ тотъ такъ и другой эквивалентны одной и той же системѣ векторовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если β и β' эквивалентны одной и той же системѣ, то они эквивалентны одинъ другому и по теоремѣ предыдущаго параграфа (частный случай)

$$км_o(\beta)=км_o(\beta') \qquad (32)$$

гдѣ бы ни находилась точка o. Прежде всего легко видѣть, что это равенство не совмѣстимо съ предположеніемъ, что одинъ изъ векторовъ β или β' равенъ нулю, а другой отличенъ отъ нуля. Ибо при $\beta'=0$ и $\beta\neq 0$, взявъ точку o на лучѣ β, мы имѣемъ (§ 33) $км_o(\beta')=0$, $км_o(\beta)=\beta$, что противорѣчитъ (32). Слѣдовательно или оба вектора β и β' равны нулю, и то, что мы желаемъ доказать уже доказано, или оба отличны отъ нуля. Въ послѣднемъ случаѣ возьмемъ точку o на полярѣ луча β; тогда $км_o(\beta)=0$ и по равенству (32) $км_o(\beta')=0$. Такъ какъ $\beta'\neq 0$, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что лучъ β' перпендикуляренъ ко всѣмъ точкамъ o поляры β и, значитъ, совпадаетъ съ лучемъ β. Если теперь возьмемъ точку o на общемъ лучѣ векторовъ β и β', то $км_o(\beta)=\beta$, $км_o(\beta')=\beta'$, и равенство (32) обратится въ

$$\beta=\beta'.$$

Итакъ, есть только одинъ векторъ эквивалентный данной плоской системѣ векторовъ. Его будемъ называть суммой векторовъ плоской системы.

Изъ сказаннаго по принципу двойственности слѣдуетъ, что существуетъ одинъ и только одинъ роторъ эквивалентный данной системѣ роторовъ, оси которыхъ проходятъ черезъ одну и ту же точку. Такой роторъ мы будемъ называть суммой роторовъ данной системы.

Пользуясь этими обобщеніями понятій суммы векторовъ и роторовъ, мы можемъ ввести еще два новыхъ понятія теоріи векторовъ.

Главнымъ роторомъ системы, которая въ общемъ случаѣ состоитъ изъ векторовъ и роторовъ, для (относительно) какой нибудь точки называется сумма моментовъ векторовъ системы

и комоментовъ роторовъ системы относительно этой точки. Такимъ образомъ главный роторъ системы S, состоящей изъ векторовъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и роторовъ $\acute{\text{я}}_1, \acute{\text{я}}_2, \ldots$, для точки o равняется

$$\sum_i \text{мм}_o(\alpha_i) + \sum_k \text{км}_o(\acute{\text{я}}_k). \qquad (33)$$

Главный роторъ системы для точки называется моментомъ системы относительно этой точки, если система состоитъ только изъ векторовъ, и комоментомъ, если она состоитъ только изъ роторовъ.

Главнымъ векторомъ системы, которая въ общемъ случаѣ состоитъ изъ векторовъ и роторовъ, для (относительно) плоскости называется сумма комоментовъ векторовъ системы и моментовъ роторовъ системы относительно этой плоскости. Такимъ образомъ векторъ системы S для плоскости O равняется

$$\sum_i \text{км}_O(\alpha_i) + \sum_k \text{мм}_O(\acute{\text{я}}_k). \qquad (34)$$

Главный векторъ системы для плоскости называется комоментомъ системы относительно этой плоскости, если система состоитъ только изъ векторовъ, и моментомъ, если она состоитъ только изъ роторовъ.

Такъ какъ въ томъ случаѣ, когда плоскость O полярна съ точкой o,

$$\text{мм}_o(\alpha_i), \ (i=1,2,\ldots), \quad \text{км}_o(\acute{\text{я}}_k), \ (k=1,2,\ldots)$$

полярны соотвѣтственно (§ 34) съ

$$\text{км}_O(\alpha_i), \ (i=1,2,\ldots), \quad \text{мм}_{O_1}(\acute{\text{я}}_k), \ (k=1,2,\ldots),$$

то главный роторъ системы для какой нибудь точки и главный векторъ ея для плоскости полярной съ точкой взаимно полярны.

Теорема I.

Комоментъ суммы двухъ векторовъ относительно плоскости равняется суммѣ комоментовъ слагаемыхъ векторовъ относительно той же плоскости.

Моментъ суммы двухъ роторовъ относительно плоскости равняется суммѣ моментовъ слагаемыхъ роторовъ относительно той же плоскости.

Комоментъ суммы двухъ роторовъ относительно точки равняется суммѣ комоментовъ слагаемыхъ роторовъ относительно той же точки.

Моментъ суммы двухъ векторовъ относительно точки равняется суммѣ моментовъ слагаемыхъ векторовъ относительно той же точки.

Совершенно также, какъ и при доказательствѣ теоремы II § 35, мы легко убѣдимся, что изъ этихъ четырехъ теоремъ достаточно доказать только одну, напримѣръ лѣвую верхнюю.

Пусть векторъ $oz=ox+oy$; возьмемъ взаимно перпендикулярныя точку a и плоскость A, и пусть

$$\alpha_1=\text{км}_a(ox),\ \beta_1=\text{км}_a(oy),\ \gamma_1=\text{км}_a(oz),$$
$$\alpha_2=\text{км}_A(ox),\ \beta_2=\text{км}_A(oy),\ \gamma_2=\text{км}_A(oz).$$

Тогда, по теоремѣ II § 35,

$$\gamma_1=\alpha_1+\beta_1,$$
$$\text{км}_o(\gamma_1)=\text{км}_o(\alpha_1)+\text{км}_o(\beta_1), \tag{35}$$

гдѣ бы ни находилась точка o. Такъ какъ $oz=ox+oy$ и системы (α_1,α_2), (β_1,β_2), (γ_1,γ_2) по теоремѣ II § 34 эквивалентны соотвѣтственно векторамъ ox, oy и oz, то систему (γ_1,γ_2) мы можемъ элементарными операціями преобразовать въ систему $(\alpha_2,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$; слѣдовательно системы (γ_1,γ_2) и $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ эквивалентны и по теоремѣ § 36 мы будемъ имѣть

$$\text{км}_o(\gamma_1)+\text{км}_o(\gamma_2)=\text{км}_o(\alpha_1)+\text{км}_o(\alpha_2)+\text{км}_o(\beta_1)+\text{км}_o(\beta_2).$$

Вычитая изъ этого равенства почленно (35), получаемъ

$$\text{км}_o(\gamma_2)=\text{км}_o(\alpha_2)+\text{км}_o(\beta_2). \tag{36}$$

Мы знаемъ, что лучами для векторовъ $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ служатъ линіи пересѣченія плоскости A съ плоскостями aox, aoy, aoz соотвѣтственно. Эти плоскости пересѣкаются по линіи ao, и лучи векторовъ $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ проходятъ всѣ черезъ точку встрѣчи этой линіи съ плоскостью A. Поэтому, если мы предположимъ, что точка o совпадаетъ съ этой послѣдней точкой, то лучи $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ всѣ пройдутъ черезъ точку o, мы будемъ имѣть

$$\text{км}_o(\alpha_2)=\alpha_2,\ \text{км}_o(\beta_2)=\beta_2,\ \text{км}_o(\gamma_2)=\gamma_2,$$

и равенство (36) обратится слѣдующее:

$$\gamma_2=\alpha_2+\beta_2$$

или
$$\text{км}_A(oz)=\text{км}_A(ox)+\text{км}_A(oy),$$

которое и доказываетъ теорему.

Теорема II.

Если двѣ системы эквивалентны, то главные векторы ихъ для одной и той же плоскости равны.

Если двѣ системы эквивалентны, то главные роторы ихъ для одной и той же точки равны.

Въ справедливости этой теоремы мы убѣждаемся, показавъ помощью предыдущей теоремы и свойствъ комоментовъ и моментовъ не измѣняться съ перемѣщеніемъ вектора вдоль его луча и съ поворотомъ ротора вокругъ его оси совершенно также, какъ и при доказательствѣ теоремы § 36, что ни одна изъ элементарныхъ операцій не вліяетъ на главный векторъ системы для плоскости и главный роторъ—для точки.

Частные случаи.—Въ частномъ случаѣ, когда системы состоятъ только изъ векторовъ или только изъ роторовъ, теоремы обращаются въ слѣдующія.

Если двѣ системы векторовъ эквивалентны, то моменты ихъ относительно одной и той же точки равны.

Если двѣ системы роторовъ эквивалентны, то комоменты ихъ относительно одной и той же точки равны.

Если двѣ системы роторовъ эквивалентны, то моменты ихъ относительно одной и той же плоскости равны.

Если двѣ системы векторовъ эквивалентны, то комоменты ихъ относительно одной и той же плоскости равны.

38. Приведеніе системы къ простѣйшему виду.

Теорема I.—*Всякая система эквивалентна: 1) или главнымъ векторамъ системы для точки и полярной съ ней плоскости; 2) или главному вектору и главному ротору системы для одной и той же точки; 3) или главному вектору и главному ротору системы для одной и той же плоскости; 4) или главнымъ роторамъ системы для точки и полярной съ ней плоскости.*

Такъ какъ доказательство всѣхъ случаевъ теоремы совершенно одинаково и опирается на соотвѣтствующіе случаи теоремы II § 34, то достаточно разсмотрѣть только одинъ изъ нихъ.

Пусть система S состоитъ изъ векторовъ $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ и роторовъ $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$. Если o какая нибудь точка и

$$\alpha_i=\text{км}_o(\gamma_i)\,,\quad \mathfrak{A}_i=\text{мм}_o(\gamma_i),$$
$$\beta_k=\text{мм}_o(\Gamma_k)\,,\quad \mathfrak{B}_k=\text{км}_o(\Gamma_k),$$

то по теоремѣ II § 34 наша система S будетъ эквивалентна системѣ, состоящей изъ векторовъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$ и роторовъ $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ Лучи векторовъ и оси роторовъ проходятъ всѣ черезъ точку o; слѣдовательно вся совокупность векторовъ будетъ эквивалентна одному вектору, равному

$$\sum\alpha + \sum\beta = \sum_i \text{км}_o(\gamma_i) + \sum_k \text{мм}_o(\Gamma_k),$$

а вся совокупность роторовъ—одному ротору, равному

$$\sum\mathfrak{A} + \sum\mathfrak{B} = \sum_i \text{мм}_o(\gamma_i) + \sum_k \text{км}_o(\Gamma_k).$$

Но первая сумма есть главный векторъ системы, а вторая—главный роторъ системы для точки o, и теорема такимъ образомъ доказана.

Слѣдствіе.—*Если два изъ слѣдующихъ четырехъ геометрическихъ элементовъ не полярныхъ взаимно: главные векторы и главные роторы системы для точки и полярной съ ней плоскости одной системы равны соотвѣтствующимъ двумъ элементамъ другой, то эти двѣ системы эквивалентны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть для точки o и полярной съ ней плоскости O

$$\alpha', \beta', \mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \qquad (37)$$

суть векторы и роторы системы S',

$$\alpha'', \beta'', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \qquad (38)$$

векторы и роторы системы S''. Предположимъ, что два изъ элементовъ (37), не полярныхъ взаимно, равны соотвѣтствующимъ двумъ элементамъ (38), напримѣръ

$$\alpha' = \alpha'', \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''.$$

По доказанной теоремѣ (случай 2) система S' эквивалентна системѣ $(\alpha', \mathfrak{A}')$, а система S''—системѣ $(\alpha'', \mathfrak{A}'')$ тожественной, вслѣдствіе нашего допущенія, съ $(\alpha', \mathfrak{A}')$: системы S' и S'' эквивалентныя одной и той же системѣ эквивалентны между собой. Также доказывается справедливость теоремы и въ другихъ случаяхъ.

Ограничимъ теперь общность системъ, которыя мы разсматриваемъ, предположеніемъ, что системы состоятъ или только

изъ векторовъ, или только изъ роторовъ. По доказанной теоремѣ всякая система векторовъ $V(\gamma_1,\gamma_2,...)$ эквивалентна двумъ векторамъ:

$$\alpha=\sum_i \text{км}_o(\gamma_i),$$

комоменту системы относительно какой нибудь точки o, и

$$\beta=\sum_i \text{км}_O(\gamma_i),$$

комоменту системы относительно плоскости O полярной съ o. Разсмотримъ внимательнѣе тѣ элементарныя операціи, помощью которыхъ систему V можно преобразовать въ систему (α, β). Прежде всего, припомнивая построеніе комоментовъ вектора относительно точки и полярной съ ней плоскости, мы видимъ (§ 34), что замѣны вектора γ_i его комоментами

$$\alpha_i=\text{км}_o(\gamma_i)\ ,\ \beta_i=\text{км}_O(\gamma_i), \qquad i=1,2,....$$

можно достигнуть первой и третьей элементарными операціями. Этихъ двухъ операцій, слѣдовательно, достаточно, чтобы данную систему V преобразовать въ эквивалентную ей систему $(\alpha_1,\alpha_2,..., \beta_1,\beta_2,...)$. Замѣчая, далѣе, что для построенія векторовъ

$$\alpha=\sum_i \alpha_i \quad , \quad \beta=\sum_i \beta_i$$

мы пользуемся только операціей перенесенія вектора вдоль его луча и операціей сложенія (§ 37), мы видимъ, что послѣднюю систему въ систему (α, β) можемъ преобразовать примѣняя только первую и вторую элементарныя операціи. Такимъ образомъ система векторовъ V можетъ быть преобразована въ систему (α, β) первыми тремя элементарными операціями, безъ помощи операціи поляризированія. Понятно, что помощью тѣхъ же элементарныхъ операцій, совершая ихъ въ обратномъ порядкѣ, можемъ систему (α, β) преобразовать въ систему V.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ систему V' эквивалентную V. По теоремѣ § 36 и теоремѣ II § 37 комоменты системы V' относительно точки o и плоскости O будутъ равны соотвѣтственно векторамъ α и β, и, примѣняя сказанное относительно системы V къ системѣ V', мы знаемъ, что V' преобразуется въ систему (α, β) тремя первыми операціями. Преобразуя затѣмъ эту послѣднюю помощью тѣхъ же опера-

ціи въ систему V, мы видимъ такимъ образомъ, что систему V' можно преобразовать въ систему V, не прибѣгая къ операціи поляризированія. Итакъ мы имѣемъ слѣдующія двѣ теоремы, изъ которыхъ вторая можемъ быть доказана совершенно также какъ и первая.

Теорема II.—*Если двѣ системы векторовъ (роторовъ) эквиваленты, то онѣ могутъ быть преобразованы одна въ другую первыми тремя элементарными операціями, безъ помощи операціи поляризированія.*

39. **Моторъ.**—Пользуясь изслѣдованіями предыдущихъ параграфовъ, мы можемъ теперь ввести новое, весьма важное, понятіе теоріи векторовъ, представляющее собой обобщеніе понятій „векторъ“ и „роторъ“.

Совокупность вектора и ротора, расположенныхъ такимъ образомъ, что лучъ вектора и ось ротора лежатъ въ одной плоскости и, слѣдовательно, пересѣкаются, называется моторомъ; точка пересѣченія луча и оси называется точкой приведенія, а плоскость, въ которой они лежатъ, плоскостью приведенія мотора. Векторъ и роторъ мотора называются его элементами. Если роторъ равенъ нулю, то моторъ состоитъ только изъ одного вектора; если векторъ равенъ нулю, то моторъ состоитъ только изъ одного ротора; наконецъ, если векторъ и роторъ равны нулю, то и моторъ равенъ нулю. Такимъ образомъ векторъ и роторъ представляютъ собой частные случаи мотора.

40. **Равные моторы.**—Два мотора считаются равными, если они эквивалентны: по отношенію къ моторамъ понятія равенства и эквивалентности равнозначны. Два равныхъ мотора, которые имѣютъ различныя точки (плоскости) приведенія, мы можемъ считать, поэтому, видоизмѣненіями одного и того же мотора, происходящими вслѣдствіе перемѣны его точки (плоскости) приведенія.

Изъ опредѣленія равныхъ моторовъ слѣдуетъ.

1. Два мотора равные третьему равны (теорема § 32).

2. Теорема $I_{2,3}$ параграфа 38 показываетъ намъ, что всякая система эквивантна мотору, за точку (плоскость) приведенія котораго можно принять какую угодно точку (плоскость) пространства. Векторъ этого мотора равняется главному вектору системы для точки (плоскости) приведенія, а роторъ—ротору системы для той же точки (плоскости). Мы можемъ слѣдовательно, мѣняя точку (плоскость) приведенія, построить безчисленное множество моторовъ эквивалентныхъ данной системѣ. Но всѣ эти моторы, будучи эквивалентны

одной и той же системѣ, эквивалентны между собой и, слѣдовательно, равны. Такимъ образомъ данная система эквивалетна одному и только одному мотору, хотя послѣдній и принимаетъ различныя формы при перемѣнѣ точки (плоскости) приведенія. Такъ какъ мы имѣемъ возможность при изученіи эквивалентныхъ системъ всякую систему хактеризировать нѣкоторымъ моторомъ, то понятно, что изслѣдованіе свойствъ мотора должно представлять большую важность для всей теоріи векторовъ.

3. Всегда можно построить моторъ, который равняется данному и имѣетъ произвольную точку o (плоскость O) своей точкой (плоскостью) приведенія. Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ I_2 § 38, моторъ γ, состоящій изъ вектора α и ротора Я, эквивалентенъ, а слѣдовательно и равенъ, мотору, векторъ котораго равняется главному вектору системы (α, Я) для точки o:

$$\text{км}_o(\alpha)+\text{мм}_o(\text{Я})$$

а роторъ—главному ротору той же системы для той же точки:

$$\text{мм}_o(\alpha)+\text{км}_o(\text{Я}).$$

Этотъ моторъ очевидно имѣетъ точкой приведенія точку o. По теоремѣ же I_3 § 38 моторъ γ эквивалентенъ и равенъ мотору, векторъ котораго равняется главному вектору системы (α, Я) для плоскости O

$$\text{км}_O(\alpha)+\text{мм}_O(\text{Я}),$$

а роторъ—главному ротору той же системы для той же плоскости

$$\text{мм}_O(\alpha)+\text{км}_O(\text{Я}).$$

Этотъ роторъ имѣетъ, очевидно, плоскость O своей плоскостью приведенія.

Въ частномъ случаѣ, если Я$=0$ и моторъ γ для нѣкоторой точки или плоскости приведенія состоитъ изъ одного вектора α, то для точки (плоскости) приведенія o (O) векторъ мотора γ будетъ равняться комоменту α относительно точки o (плоскости O), а роторъ—моменту α относительно той же точки (плоскости).

Если $\alpha=0$ и моторъ γ для нѣкоторой точки или плоскости приведенія состоитъ изъ одного ротора Я, то для точки (плоскости) приведенія o (O) векторъ мотора γ будетъ равняться моменту Я относительно точки o (плоскости O), а роторъ—комоменту Я относительно той же точки (плоскости).

4. Если моторы γ_1 $(\alpha_1, \text{Я}_1)$ и γ_2 $(\alpha_2, \text{Я}_2)$ равны, то системы $(\alpha_1, \text{Я}_1)$ и $(\alpha_2, \text{Я}_2)$ эквивалентны, и, означая черезъ o какую нибудь точку, черезъ O какую нибудь плоскость, по теоремамъ § 36 и II § 37 мы имѣемъ:

$$\begin{aligned}
&\text{км}_o(\alpha_1) + \text{мм}_o(\text{Я}_1) = \text{км}_o(\alpha_2) + \text{мм}_o(\text{Я}_2),\\
&\text{мм}_o(\alpha_1) + \text{км}_o(\text{Я}_1) = \text{мм}_o(\alpha_2) + \text{км}_o(\text{Я}_2),\\
&\text{км}_O(\alpha_1) + \text{мм}_O(\text{Я}_1) = \text{км}_O(\alpha_2) + \text{мм}_O(\text{Я}_2),\\
&\text{мм}_O(\alpha_1) + \text{км}_O(\text{Я}_1) = \text{мм}_O(\alpha_2) + \text{км}_O(\text{Я}_2),
\end{aligned} \tag{39}$$

гдѣ бы ни находились точка o и плоскость O. Если моторы γ_1 и γ_2 имѣютъ общую точку приведенія, и съ нею мы совмѣстимъ точку o, то (§ 33)

$$\begin{aligned}
&\text{км}_o(\alpha_1) = \alpha_1,\ \text{км}_o(\text{Я}_1) = \text{Я}_1,\ \text{мм}_o(\alpha_1) = \text{мм}_o(\text{Я}_1) = 0,\\
&\text{км}_o(\alpha_2) = \alpha_2,\ \text{км}_o(\text{Я}_2) = \text{Я}_2,\ \text{мм}_o(\alpha_2) = \text{мм}_o(\text{Я}_2) = 0,
\end{aligned}$$

и первыя два равенства (39) обратятся въ слѣдующія

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \text{Я}_1 = \text{Я}_2. \tag{40}$$

Въ эти же равенства обратятся и послѣднія два (39), если, предположивъ, что моторы γ_1 и γ_2 имѣютъ общую плоскость приведенія, мы примемъ ее за плоскость O. Такъ какъ, обратно, равенства (40) влекутъ за собой равенство моторовъ γ_1 и γ_2, то изъ сказаннаго мы заключаемъ, что для равенства двухъ моторовъ необходимо и достаточно, чтобы для одной и той же точки (плоскости) приведенія векторъ перваго былъ равенъ вектору второго и роторъ перваго — ротору второго.

41. **Ось мотора.** — Предположимъ, что для даннаго мотора можно найти такую точку приведенія, что лучъ вектора и ось ротора лежатъ на одной и той же прямой ε, проходящій черезъ эту точку. Очевидно, что въ такомъ случаѣ нашъ моторъ не измѣнится, если мы будемъ переносить его векторъ вдоль линіи ε и поворачивать его роторъ вокругъ этой линіи; слѣдовательно лучъ вектора и ось ротора нашего мотора всегда будетъ совпадать съ линіей ε, какую бы точку этой линіи и какую бы плоскость, черезъ нее проходящую, мы ни приняли бы за точку или плоскость приведенія. Линію ε, обладающую такимъ свойствомъ по отношенію къ данному мотору, мы будемъ называть лучемъ или осью мотора.

Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о томъ, для всякаго ли мотора существуетъ ось, мы замѣтимъ здѣсь только слѣдующее. Если прямая ε служитъ осью мотора, то поляра линіи ε будетъ также осью мотора. Въ самомъ дѣлѣ, векторъ α и роторъ $\mathfrak{A}$ нашего мотора, которые лежатъ на линіи ε, когда точку приведенія возьмемъ на этой прямой, эквивалентны полярнымъ съ ними ротору $\mathfrak{B}$ и вектору β, осью и лучемъ для которыхъ служитъ поляра ε' линіи ε. Слѣдовательно, если для даннаго мотора возьмемъ точку приведенія на ε', его элементами будутъ служить β и $\mathfrak{B}$, лучъ вектора и ось ротора совпадутъ съ линіей ε', и значитъ эта линія служитъ осью нашего мотора. Итакъ мы имѣемъ такую теорему.

Теорема.—*Если моторъ имѣетъ ось, то онъ имѣетъ еще и другую ось полярную съ первой.*

42. Проэкція мотора на линію.

Лемма.

Проэкція вектора мотора, вектора, построеннаго для какой нибудь точки приведенія o, лежащей на прямой ε, на линію ε не зависитъ отъ положенія точки o.

Проэкція ротора мотора, ротора, построеннаго для какой нибудь плоскости приведенія O, проходящей черезъ прямую ε, на линію ε не зависитъ отъ положенія плоскости O.

Пусть α—векторъ, $\mathfrak{A}$—роторъ мотора γ для какой нибудь точки приведенія o, находящейся на линіи ε, β—векторъ, $\mathfrak{B}$—роторъ того же мотора для какой нибудь плоскости приведенія O, проходящей черезъ линію ε. Векторъ α_1 того же мотора γ для точки приведенія a опредѣлится равенствомъ

$$\alpha_1 = \text{км}_a(\alpha) + \text{мм}_a(\mathfrak{A}),$$

изъ котораго, предполагая, что точка a находится на линіи ε и проэктируя векторы α_1, $\text{км}_a(\alpha)$, $\text{мм}_a(\mathfrak{A})$ на эту линію, мы получаемъ по теоремѣ III § 27:

$$\text{пр.}\alpha_1 = \text{пр.км}_a(\alpha) + \text{пр.мм}_a(\mathfrak{A}). \qquad (41)$$

Лучъ $\text{мм}_a(\mathfrak{A})$, будучи перпендикуляренъ къ плоскости, проведенной черезъ a и ось ротора $\mathfrak{A}$, перпендикуляренъ и къ линіи ε, такъ какъ эта послѣдняя проходитъ черезъ точки a и o и пересѣкается съ осью $\mathfrak{A}$. Поэтому

$$\text{пр.мм}_a(\mathfrak{A}) = 0,$$

и равенство (41) можетъ быть написано проще

$$\text{пр.}\alpha_1 = \text{пр.км}_a(\alpha).$$

Разложимъ α на два вектора α' и α'' по линіи ε и линіи къ ней перпендикулярной; тогда

$$\alpha = \alpha' + \alpha'',$$

$$\text{км}_a(\alpha) = \text{км}_a(\alpha') + \text{км}_a(\alpha''), \qquad \text{(теорема II § 35)}$$

$$\text{пр.км}_a(\alpha) = \text{пр.км}_a(\alpha') + \text{пр.км}_a(\alpha''), \qquad \text{(теорема III § 27)}$$

и слѣдовательно

$$\text{пр.}\alpha_1 = \text{пр.км}_a(\alpha') + \text{пр.км}_a(\alpha'').$$

По построенію лучъ α'' перпендикуляренъ къ линіи ε, и мы можемъ эту послѣднюю разсматривать какъ перпендикуляръ, опущенный изъ a на лучъ α''; поэтому лучъ $\text{км}_a(\alpha'')$ будетъ перпендикуляренъ къ ε (§ 34_3),

$$\text{пр.км}_a(\alpha'') = 0,$$

и послѣднее равенство, упрощаясь еще разъ, принимаетъ видъ:

$$\text{пр.}\alpha_1 = \text{пр.км}_a(\alpha').$$

Такъ какъ векторъ α' лежитъ на линіи ε, то

$$\text{км}_a(\alpha') = \alpha', \text{ (§ 33)}, \quad \text{пр.км}_a(\alpha') = \text{пр.}\alpha' = \alpha',$$

и наше равенство можетъ быть написано такимъ образомъ

$$\text{пр.}\alpha_1 = \alpha'.$$

Но лучи α' и α'' взаимно перпендикулярны, поэтому (§ 27)

$$\alpha' = \text{пр.}\alpha$$

и

$$\text{пр.}\alpha_1 = \text{пр.}\alpha.$$

Такъ какъ α и α_1 суть векторы мотора γ для точекъ a и o, положеніе которыхъ на линіи ε совершенно произвольно, то это равенство и доказываетъ справедливость лѣвой леммы. Совершенно также можетъ быть доказана и правая лемма, соотвѣтствующая лѣвой по принципу двойственности.

Опираясь на предыдущую лемму, мы введемъ теперь весьма важное понятіе о проэкціи мотора на линію.

Геометрической проэкціей или просто проэкціей мотора γ на линію ε называется моторъ, векторъ котораго равняется проэкціи на линію ε вектора γ, построеннаго для какой нибудь точки приведенія, лежащей на линіи ε, а роторъ— проэкціи на линію ε ротора γ, построеннаго для какой нибудь плоскости приведенія, проходящей черезъ линію ε. Проэкцію мотора γ мы будемъ означать такимъ образомъ

$$\text{пр}_\varepsilon(\gamma).$$

Изъ доказанной леммы слѣдуетъ, что проэкція даннаго мотора на данную линію ε не зависитъ отъ положенія той вспомогательной точки линіи ε и той вспомогательной плоскости, проходящей черезъ линію ε, которыя мы принимаемъ соотвѣтственно за точку и плоскость приведенія, когда строимъ проэкцію мотора на линію ε. Проэкція даннаго мотора на данную линію зависитъ только отъ мотора и положенія линіи. Очевидно, что осью $\text{пр}_\varepsilon(\gamma)$ служитъ линія ε.

Конечно, опредѣленіе проэкціи мотора примѣнимо и къ вектору и къ ротору, которые могутъ быть разсматриваемы какъ частные случаи мотора, и нетрудно видѣть, что оно не противорѣчитъ ранѣе данному въ § 27 опредѣленію проэкціи, но заключаетъ въ себѣ послѣднее какъ частный случай, когда начало проэктируемаго вектора находится на линіи проэкцій, а начальная плоскость проэктируемаго ротора проходитъ черезъ эту послѣднюю. Дѣйствительно, пусть γ есть векторъ, имѣющій начало на линіи ε, и пусть γ' его проэкція на ε, построенная такъ, какъ было объяснено въ § 27. Чтобы построить проэкцію γ на линію ε согласно съ новымъ опредѣленіемъ, мы должны, разсматривая векторъ γ какъ моторъ, построить его векторъ α для какой нибудь точки приведенія o линіи ε и его роторъ для какой нибудь плоскости O, проходящей черезъ ε,

$$\alpha = \text{км}_o(\gamma), \quad \mathfrak{B} = \text{мм}_o(\gamma) \qquad (\S\ 40_3)$$

Проще всего за точку o принять начало γ и за плоскость O—плоскость, проходящую черезъ ε и лучъ γ; тогда

$$\alpha = \gamma, \qquad \mathfrak{B} = 0.$$

Затѣмъ мы должны спроэктировать α и $\mathfrak{B}$ по правиламъ § 27 на линію ε; въ силу перваго равенства проэкція α будетъ равняться γ', въ силу второго проэкція $\mathfrak{B}$—нулю. Итакъ проэкція вектора γ на линію ε представляетъ собой моторъ,

векторъ котораго равенъ γ', а роторъ равенъ нулю, и слѣдовательно тожественна съ проэкціей γ построенной согласно съ опредѣленіемъ § 27. Также покажемъ, что новое опредѣленіе проэкціи ротора на линію представляетъ собой обобщеніе опредѣленія § 27.

Пользуясь обобщеннымъ понятіемъ проэкціи, мы имѣемъ такую теорему.

Теорема. — *Проэкціи на линію ε векторовъ (роторовъ) мотора, построенныхъ для какой нибудь точки o линіи ε и для какой нибудь плоскости O, проходящей черезъ линію ε, равны между собой и не зависятъ отъ положенія точки o и плоскости O.*

Въ самомъ дѣлѣ, сохраняя прежнія обозначенія и припоминая, что α и $\mathfrak{A}$ суть элементы мотора γ для точки o, а β и $\mathfrak{B}$—для плоскости O, по параграфу 40, имѣемъ такія соотношенія:

$$\alpha = \text{км}_o(\beta) + \text{мм}_o(\mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{B} = \text{мм}_O(\alpha) + \text{км}_O(\mathfrak{A}),$$

изъ которыхъ, проэктируя на линію ε входящіе въ нихъ векторы и роторы по правиламъ § 27, получаемъ:

$$\text{пр.}\alpha = \text{пр.км}_o(\beta) + \text{пр.мм}_o(\mathfrak{B}),$$
$$\text{пр.}\mathfrak{B} = \text{пр.мм}_O(\alpha) + \text{пр.мм}_O(\mathfrak{A}). \qquad (42)$$

Плоскость O проходитъ черезъ ось ротора $\mathfrak{B}$ и черезъ точку o; поэтому лучъ $\text{мм}_o(\mathfrak{B})$ перпендикуляренъ къ плоскости O и линіи ε на ней лежащей (§ 34_5), $\text{пр.мм}_o(\mathfrak{B}) = 0$, и

$$\text{пр.}\alpha = \text{пр.км}_o(\beta).$$

Будемъ теперь разсматривать векторъ β какъ моторъ и построимъ его проэкцію на линію ε. Съ этою цѣлью мы должны сначала построить векторъ мотора β для точки приведенія o

$$\text{км}_o(\beta)$$

и роторъ мотора β для плоскости приведенія O

$$\text{мм}_O(\beta)$$

и затѣмъ построить ихъ проэкціи по правиламъ § 27 на линію ε:

$$\text{пр.км}_o(\beta),\ \text{пр.мм}_O(\beta).$$

Моторъ, состоящій изъ этихъ элементовъ, и будетъ проэкціей $\mathcal{B}$ на линію ε. Но роторъ этого мотора

$$\text{пр.мм}_O(\beta)$$

равняется нулю, ибо β лежитъ въ плоскости O, и $\text{мм}_O(\beta)=0$; слѣдовательно

$$\text{пр.}\beta=\text{пр.км}_o(\beta)$$

и

$$\text{пр.}\alpha=\text{пр.}\beta.$$

Также изъ второго равенства (42) выведемъ

$$\text{пр.}\mathfrak{A}=\text{пр.}\mathfrak{B}.$$

Итакъ мы доказали, что проэкціи на линію ε элементовъ мотора γ для точки приведенія o равны проэкціямъ на ту же линію соотвѣтствующихъ элементовъ мотора γ для плоскости приведенія O. Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ уже само собой, что проэкціи, о которыхъ идетъ рѣчь, не зависятъ отъ положенія точки o и плоскости O: онѣ не зависятъ отъ положенія плоскости O потому, что α и $\mathfrak{A}$ суть элементы приведенія для точки o и ничѣмъ не связаны съ плоскостью O; онѣ не зависятъ отъ положенія точки o потому, что β и $\mathfrak{B}$ суть элементы мотора для плоскости O и ничѣмъ не связаны съ точкой o.

Слѣдствіе.—Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что какъ векторъ такъ и роторъ проэкціи мотора на линію ε мы можемъ построить двумя способами.

1. Построивъ векторъ и роторъ даннаго мотора для какой нибудь точки приведенія, лежащей на линіи ε, находимъ затѣмъ ихъ проэкціи на линію ε. Проэкція вектора будетъ векторомъ проэкціи, проэкція ротора—роторомъ проэкціи.

2. Построивъ векторъ и роторъ даннаго мотора для какой нибудь плоскости приведенія, проходящей черезъ линію ε, находимъ затѣмъ ихъ проэкціи на линію ε. Проэкція вектора будетъ векторомъ проэкціи, проэкція ротора—роторомъ проэкціи.

43. **Компоненты и моменты относительно линіи.**—Мы видѣли въ § 40_3, что въ томъ частномъ случаѣ, когда моторъ состоитъ изъ одного вектора (ротора) α, его элементами для точки приведенія o служатъ:

$$\text{км}_o(\alpha),\ \text{мм}_o(\alpha),$$

а для плоскости приведенія O:

$$\text{км}_O(\alpha),\ \text{мм}_O(\alpha).$$

Поэтому въ упомянутыхъ частныхъ случаяхъ теорема предыдущаго параграфа обращается въ слѣдующія.

1. *Проэкціи на линію ε моментовъ вектора (ротора) относительно какой нибудь точки o линіи ε и какой нибудь плоскости O, проходящей черезъ линію ε, равны между собой и не зависятъ отъ положенія точки o и плоскости O.*

Каждую изъ этихъ проэкцій мы будемъ называть геометрическимъ моментомъ или просто моментомъ вектора (ротора) относительно линіи ε. Моментъ вектора (ротора) α относительно линіи ε мы будемъ означать такимъ образомъ

$$\text{мм}_\varepsilon(\alpha).$$

Если лучъ вектора (ось ротора) α лежитъ въ одной плоскости съ линіей ε, то ось (лучъ) $\text{мм}_o(\alpha)$ будетъ перпендикулярна къ линіи ε и $\text{мм}_\varepsilon(\alpha)=0$. Обратно, если $\text{мм}_\varepsilon(\alpha)=0$, но $\alpha\neq 0$, то ось (лучъ) $\text{мм}_o(\alpha)$ перпендикулярна къ линіи ε, а такъ какъ ось $\text{мм}_o(\alpha)$ кромѣ того перпендикульрна и къ плоскости проведенной черезъ o и лучъ (ось) α, то линіи α и ε лежатъ въ одной плоскости. Итакъ для того, чтобы моментъ вектора (ротора), отличнаго отъ нуля, относительно линіи ε былъ равенъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы лучъ (ось) α лежалъ въ одной плоскости съ ε.

Моментомъ системы векторовъ (роторовъ) относительно линіи называется сумма моментовъ всѣхъ векторовъ (роторовъ) системы относительно этой линіи. Если двѣ системы векторовъ (роторовъ) эквивалентны, то моменты ихъ относительно одной и той же линіи равны. Это слѣдуетъ изъ теоремъ §§ 36, 37 и III § 27.

2. *Проэкціи на линію ε комоментовъ вектора (ротора) относительно какой нибудь точки o линіи ε и какой нибудь плоскости O, проходящей черезъ линію ε, равны между собой и не зависятъ отъ положенія точки o и плоскости O.*

Каждую изъ этихъ проэкцій мы будемъ называть геометрическимъ комоментомъ или просто комоментомъ вектора (ротора) относительно линіи ε. Комоментъ вектора (ротора) α относительно линіи ε мы будемъ означать такимъ образомъ

$$\text{км}_\varepsilon(\alpha).$$

Если Г роторъ (векторъ) полярный съ векторомъ (ротором) γ, то

$$\text{км}_o(\gamma)=\text{мм}_o(\Gamma),\ \text{мм}_o(\gamma)=\text{км}_o(\Gamma)$$

и слѣдовательно

$$\text{пр}_\varepsilon \text{км}_o(\gamma)=\text{пр}_\varepsilon \text{мм}_o(\Gamma),\ \text{пр}_\varepsilon \text{мм}_o(\gamma)=\text{пр}_\varepsilon \text{км}_o(\Gamma);$$

иначе: $$\text{км}_\varepsilon(\gamma)=\text{мм}_\varepsilon(\Gamma),\ \text{мм}_\varepsilon(\gamma)=\text{км}_\varepsilon(\Gamma),$$

т. е. комоментъ вектора (ротора) относительно линіи равняется моменту полярнаго ротора (вектора) относительно той же линіи. Поэтому, принимая во вниманіе, что лучъ (ось) γ и ось (лучъ) Г взаимно полярны, изъ сказаннаго выше видимъ, что комоментъ вектора (ротора) отличнаго отъ нуля относительно линіи ε обращается въ нуль только тогда, когда лучъ вектора (ось ротора) лежитъ въ одной плоскости съ полярой ε.

Комоментомъ системы векторовъ (роторовъ) относительно линіи называется сумма комоментовъ всѣхъ векторовъ системы относительно этой линіи. Если двѣ системы векторовъ (роторовъ) эквивалентны, то комоменты ихъ относительно одной и той же линіи равны. Это слѣдуетъ изъ теоремъ §§ 36, 37 и III § 27.

Проэкція вектора (ротора) α имѣетъ такіе элементы

$$\text{пр}_\varepsilon \text{км}_o(\alpha),\ \text{пр}_\varepsilon \text{мм}_o(\alpha).$$

Такъ какъ первый есть $\text{км}_\varepsilon(\alpha)$, а второй $\text{мм}_\varepsilon(\alpha)$, то мы можемъ теперь сказать, что проэкція вектора (ротора) на линію ε есть моторъ, векторъ (роторъ) котораго равняется комоменту вектора (ротора), а роторъ (векторъ)—моменту вектора (ротора) относительно ε.

44. **Сумма моторовъ.**—Суммой двухъ моторовъ γ_1 и γ_2 называется моторъ γ эквивалентный совокупности моторовъ γ_1 и γ_2. Чтобы показать, что γ есть сумма моторовъ γ_1 и γ_2 пишутъ

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2.$$

Изъ этого опредѣленія суммы слѣдуетъ.

1. Сложеніе моторовъ коммутативно, ибо моторы

$$\gamma_1+\gamma_2\quad,\ \gamma_2+\gamma_1$$

оба эквивалентны одной и той же совокупности моторовъ и слѣдовательно равны.

2. Сложеніе моторовъ ассоціативно, ибо моторы

$$(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_3, \qquad \gamma_1+(\gamma_2+\gamma_3)$$

оба эквивалентны одной и той же совокупности моторовъ и слѣдовательно равны.

3. Моторъ $\gamma(\alpha,\text{Я})$ можно разсматривать какъ сумму вектора α и ротора Я:

$$\gamma=\alpha+\text{Я}.$$

4. Моторъ эквивалентный данной системѣ представляетъ собой сумму векторовъ и роторовъ системы. Ибо каждый векторъ и каждый роторъ системы можно разсматривать какъ моторъ, и суммой ихъ будетъ моторъ эквивалентный совокупности всѣхъ векторовъ и роторовъ.

5. Для того, чтобы двѣ системы моторовъ S и S' были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы сумма моторовъ первой системы равнялась суммѣ моторовъ второй. Ибо, если эти суммы равны, то обѣ системы эквивалентны одному и тому же мотору и слѣдовательно эквивалентны между собой; обратно, когда системы эквивалентны, то онѣ эквивалентны одному и тому же мотору и слѣдовательно суммы ихъ равны.

6. Сумма двухъ моторовъ $\gamma_1(\alpha_1,\text{Я}_1)$ и $\gamma_2(\alpha_2,\text{Я}_2)$ равняется мотору γ, у котораго элементами для точки приведенія o служатъ (§ 40_2):

$$\text{векторъ,} \quad \alpha=\text{км}_o(\alpha_1)+\text{км}_o(\alpha_2)+\text{мм}_o(\text{Я}_1)+\text{мм}_o(\text{Я}_2), \tag{43}$$
$$\text{роторъ,} \quad \text{Я}=\text{мм}_o(\alpha_1)+\text{мм}_o(\alpha_2)+\text{км}_o(\text{Я}_1)+\text{км}_o(\text{Я}_2),$$

а для плоскости приведенія O (§ 40_2)

$$\text{векторъ,} \quad \beta=\text{км}_O(\alpha_1)+\text{км}_O(\alpha_2)+\text{мм}_O(\text{Я}_1)+\text{мм}_O(\text{Я}_2), \tag{44}$$
$$\text{роторъ,} \quad \text{B}=\text{мм}_O(\alpha_1)+\text{мм}_O(\alpha_2)+\text{км}_O(\text{Я}_1)+\text{км}_O(\text{Я}_2).$$

Ибо моторъ γ эквивалентенъ системѣ $(\alpha_1,\alpha_2,\text{Я}_1,\text{Я}_2)$, а эта послѣдняя эквивалентна (теорема I § 38) мотору γ съ элементами (43) для точки приведенія o и съ элементами (44) для плоскости приведенія O.

Если моторы γ_1 и γ_2 имѣютъ общую точку приведенія, то совмѣстивъ съ нею точку o, мы имѣемъ

$$\text{км}_o(\alpha_1)=\alpha_1,\ \text{км}_o(\text{Я}_1)=\text{Я}_1,\ \text{мм}_o(\alpha_1)=\text{мм}_o(\text{Я}_1)=0,$$
$$\text{км}_o(\alpha_2)=\alpha_2,\ \text{км}_o(\text{Я}_2)=\text{Я}_2,\ \text{мм}_o(\alpha_2)=\text{мм}_o(\text{Я}_2)=0,$$

и элементы мотора γ для точки приведенія общей съ γ_1 и γ_2 принимаютъ видъ

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2.$$

Если моторы γ_1 и γ_2 имѣютъ общую плоскость приведенія, и мы примемъ ее за плоскость O, то равенства (44) обращаются въ такія

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2,\ \mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2.$$

Такимъ образомъ, если складываемые моторы имѣютъ общую точку (плоскость) приведенія, то векторъ суммы равняется суммѣ векторовъ и роторъ суммы — суммѣ роторовъ слагаемыхъ моторовъ.

Теорема.—*Проэкція суммы равняется суммѣ проэкцій.*

Эта теорема доказывается помощью теоремы III §27 и представляетъ ея обобщеніе. Пусть α_1 и α_2 суть векторы моторовъ γ_1 и γ_2 для точки приведенія o линіи ε и $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$ роторы γ_1 и γ_2 для плоскости приведенія O, проходящей черезъ ε. Означивъ черезъ α векторъ суммы $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ для точки приведенія o и черезъ $\mathfrak{B}$ роторъ той же суммы γ для плоскости приведенія O, по доказанному выше имѣемъ:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2.$$

Отсюда, проэктируя векторы α,α_1,α_2 и роторы $\mathfrak{B},\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$ на линію ε, по теоремѣ III § 27 получаемъ:

$$\text{пр.}\alpha=\text{пр.}\alpha_1+\text{пр.}\alpha_2,\ \text{пр.}\mathfrak{B}=\text{пр.}\mathfrak{B}_1+\text{пр.}\mathfrak{B}_2.$$

Такъ какъ линія ε служитъ общимъ лучомъ для векторовъ $\text{пр.}\alpha,\text{пр.}\alpha_1,\text{пр.}\alpha_2$ и общею осью для роторовъ $\text{пр.}\mathfrak{B},\text{пр.}\mathfrak{B}_1,\text{пр.}\mathfrak{B}_2$, то изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что моторъ съ элементами

$$\text{пр.}\alpha,\ \text{пр.}\mathfrak{B}$$

есть сумма моторовъ съ элементами

$$\text{пр.}\alpha_1,\text{пр.}\mathfrak{B}_1;\qquad \text{пр.}\alpha_2,\text{пр.}\mathfrak{B}_2.$$

Но первый представляетъ собой проэкцію мотора $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, а послѣдніе два проэкціи моторовъ γ_1 и γ_2 на линію ε, слѣдовательно проэкція суммы равняется суммѣ проэкціи, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе.—Мы видѣли, что моторъ $\gamma(\alpha,\text{Я})$ можно разсматривать какъ сумму его вектора α и ротора Я. Поэтому изъ доказанной теоремы слѣдуетъ

$$\text{пр}_\varepsilon \gamma = \text{пр}_\varepsilon \alpha + \text{пр}_\varepsilon \text{Я}. \qquad (45)$$

Но $\text{пр}_\varepsilon(\alpha)$ и $\text{пр}_\varepsilon(\text{Я})$ имѣютъ соотвѣтственно такіе элементы

$$\text{км}_\varepsilon(\alpha),\ \text{мм}_\varepsilon(\alpha); \qquad \text{мм}_\varepsilon(\text{Я}),\ \text{км}_\varepsilon(\text{Я}).$$

Такъ какъ линія ε служитъ лучомъ для векторовъ $\text{км}_\varepsilon(\alpha)$ и $\text{мм}_\varepsilon(\text{Я})$, и осью для роторовъ $\text{мм}_\varepsilon(\alpha)$, $\text{км}_\varepsilon(\text{Я})$, то векторъ суммы (45) будетъ равняться:

$$\text{км}_\varepsilon(\alpha) + \text{мм}_\varepsilon(\text{Я})$$

а роторъ той же суммы

$$\text{мм}_\varepsilon(\alpha) + \text{км}_\varepsilon(\text{Я}).$$

Итакъ проэкція мотора на линію ε есть моторъ, векторъ котораго равняется комоменту вектора сложеннону съ моментомъ ротора мотора относительно ε, а роторъ — комоменту ротора сложенному съ моментомъ вектора относительно той же линіи.

Глава III.

45. **Классы и типы пространствъ.** — Предполагая, что абсолютъ не вырождается въ двѣ плоскости или въ двѣ точки, мы всегда можемъ надлежащимъ выборомъ координатнаго тетраэдра привести его ур. къ виду: въ точечныхъ координатахъ

$$k_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+k_2^2x_4^2=0 \qquad (1)$$

и въ плоскостныхъ координатахъ

$$k_2^2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)+k_1^2X_4^2=0. \qquad (2)$$

Преобразовавъ такимъ образомъ ур. абсолюта, мы будемъ называть, слѣдуя терминологіи новѣйшихъ геометровъ, отношеніе

$$\varkappa^2=k_1^2/k_2^2 \qquad (0)$$

кривизной пространства.

Всѣ пространства мы можемъ раздѣлить на три класса. Къ первому мы относимъ пространства съ кривизной равной нулю, ко второму — пространства безконечно-большой кривизны и, наконецъ, къ третьему — всѣ остальныя пространства. Абсолютъ вырождается въ коническое сѣченіе

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2=0, \qquad (3)$$

лежащее въ плоскости $x_4=0$, называемой безконечно-удаленной плоскостью, когда кривизна равняется нулю, и—въ конусъ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \qquad (4)$$

съ вершиной въ точкѣ $X_4=0$, называемой безконечно-удаленной точкой, когда кривизна равняется безконечности. Такъ какъ преобразованіе

$$x_1=X_1,\ x_2=X_2,\ x_3=X_3,\ x_4=X_4$$

обращаетъ (4) въ (3), то пространство безконечно - большой кривизны корреляціей можетъ быть преобразовано въ пространство съ кривизной равной нулю, и всѣ его свойства легко могутъ быть выведены изъ свойствъ этого послѣдняго помощью принципа двойственности. Если же кривизна пространства не равняется ни нулю, ни безконечности, то абсолютъ представляетъ собой поверхность второго порядка, которая не вырождается ни въ конусъ, ни въ кривую линію.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда коэффиціенты въ ур. абсолюта

$$f(xx)=0 \qquad \text{(см. § 22)}$$

дѣйствительны, мы можемъ различать столько же типовъ пространствъ сколько типовъ поверхностей второго порядка различаетъ въ своей классификаціи проэктивная геометрія. Замѣтимъ мимоходомъ, что классификаціи проэктивной и метрической геометрій нѣсколько различны, ибо въ первой мы обращаемъ наше вниманіе только на свойства самой поверхности (дѣйствительны или мнимы ея точки, дѣйствительны или мнимы ея прямолинейныя производящія), тогда какъ во второй сверхъ того еще и на отношенія поверхности къ выбранному нами абсолюту (напримѣръ къ безконечно-удаленной плоскости, если дѣло идетъ о классификаціи поверхностей въ Эвклидовомъ пространствѣ). Эта послѣдняя классификація съ точки зрѣнія проэктивной геометріи должна быть разсматриваема какъ классификація не отдѣльныхъ поверхностей второго порядка, а системъ, состоящихъ изъ двухъ такихъ поверхностей: данной и абсолюта. Мы не будемъ перечислять всѣхъ типовъ и обратимъ вниманіе только на тѣ случаи, когда какъ координатный тетраэдръ и единичная точка, для которыхъ ур. абсолюта обращается въ (1) или (2), такъ и коэффиціенты k_1^2 и k_2^2 дѣйствительны. Въ этихъ случаяхъ пространства получаютъ различныя названія, смотря по значенію кривизны $\varkappa^2$.

Если кривизна пространства положительна, то k_1^2 и k_2^2 также положительны и абсолютъ мнимая поверхность. Пространство съ такимъ абсолютомъ называется пространствомъ Clifford-Klein'a, или эллиптическимъ, или пространствомъ положительной кривизны.

Если кривизна пространства отрицательна, то k_1^2 и k_2^2 разныхъ знаковъ (мы будемъ считать k_1^2 отрицательнымъ, а k_2^2 положительнымъ) и абсолютъ представляетъ дѣйствительную овальную поверхность, т. е. поверхность съ мнимыми

прямолинейными производящими. Пространство, имѣющее такой абсолютъ, называется пространствомъ Лобачевскаго, или гиперболическимъ, или пространствомъ отрицательной кривизны. Дѣйствительныя точки, находящіяся внутри абсолюта называются реальными, а внѣ его—идеальными. Дѣйствительная прямая и плоскость называются реальными, если онѣ имѣютъ точки внутри абсолюта и, слѣдовательно, пересѣкаются съ нимъ въ дѣйствительныхъ точкахъ, и—идеальными въ противномъ случаѣ.

Если кривизна пространства равняется нулю, то $k_1^2=0$, и абсолютъ обращается въ мнимое коническое сѣченіе (3), лежащее въ дѣйствительной безконечно-удаленной плоскости. Пространство въ этомъ случаѣ называется пространствомъ Эвклида или параболическимъ.

Если кривизна пространства равняется безконечности, то $k_2^2=0$, и абсолютъ обращается въ мнимый конусъ (4) съ вершиной въ дѣйствительной безконечно-удаленной точкѣ. Такого рода пространство до сихъ поръ не получило особаго названія. Принимая во вниманіе, что всѣ свойства его связаны со свойствами пространства Эвклида принципомъ двойственности, его можно назвать полярнымъ съ Эвклидовымъ пространствомъ.

46. **Тензоръ вектора.** — Точки вектора мы различаемъ одну отъ другой: одну мы называемъ начальной, а другую— конечной. Послѣдовательность точекъ вектора мы будемъ называть направленіемъ вектора.

Пусть нѣкоторая прямая пересѣкаетъ абсолютъ въ двухъ точкахъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Принявъ одну изъ этихъ точекъ, напримѣръ $\mathfrak{a}$, за начальную, а другую, $\mathfrak{b}$, за конечную точку вектора $\mathfrak{ab}$, мы будемъ называть первую начальной точкой прямой, вторую — конечной, а направленіе вектора $\mathfrak{ab}$—направленіемъ прямой. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что лучу всякаго вектора можно приписать опредѣленное направленіе; его мы будемъ называть положительнымъ направленіемъ вектора.

Пусть мы имѣемъ векторъ xy. Приписавъ лучу вектора опредѣленное направленіе и принявъ его за положительное направленіе вектора, означимъ черезъ $\mathfrak{a}$ — начальную точку луча, черезъ $\mathfrak{b}$—конечную. Длиной вектора xy или разстояніемъ между точками x и y мы будемъ называть величину

$$\delta=\frac{1}{2ik_1}\log(\mathfrak{ab}xy), \qquad (5)$$

гдѣ $(\mathfrak{ab}xy)$ есть ангармоническое отношеніе точекъ $\mathfrak{a},\mathfrak{b},x,y$, k_1^2—

коэффиціентъ въ ур. (1) абсолюта и $i=\sqrt{-1}$. Такъ какъ логариѳмъ представляетъ собой многозначную функцію и для даннаго значенія аргумента опредѣляется до величинъ

$$2n\pi i,$$

гдѣ n цѣлое число, то длина вектора можетъ имѣть безчисленное множество значеній, различающихся между собой на величины кратныя отъ π/k_1.

Длину вектора xy мы можемъ выразить черезъ координаты его точекъ. Мы опредѣлили въ § 30 координаты точекъ a и b:

$$a_1=\alpha x_1+\beta y_1 \quad , \quad b_1=\gamma x_1+\beta y_1 \tag{1234}$$

гдѣ
$$\alpha=-f(xy)+\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)},$$
$$\beta= f(xx),$$
$$\gamma=-f(xy)-\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)}.$$

Пользуясь ими, имѣемъ

$$(ab xy)= \gamma/\alpha \tag{6}$$

$$\delta=\frac{1}{2ik_1}\log\frac{f(xy)+\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)}}{f(xy)+\sqrt{f^2(xy)-f(xx)f(yy)}}. \tag{7}$$

Выраженіе

$$f^2(xy)-f(xx)f(yy)$$

представляетъ собой квадратичную функцію

$$\phi(pp)=-\sum_{ik}\sum_{lh}A_{ik,lh}p_{ik}p_{lh} \quad (i,k,l,h=1,2,3,4) \tag{8}$$

шести перемѣнныхъ

$$p_{ik}=x_iy_k-x_ky_i, \quad (i,k=1,2,3,4)$$

коэффиціенты которой

$$A_{ik,lh}=a_{ik}a_{lh}-a_{ih}a_{lk}$$

суть миноры второго порядка опредѣлителя (§ 22)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Вводя эту функцію въ (7), мы получаемъ для длины вектора другое выраженіе:

$$\delta = \frac{1}{2ik_1} \log \frac{f(xy) + \sqrt{\Phi(pp)}}{f(xy) - \sqrt{\Phi(pp)}}. \qquad (7')$$

Тензоромъ вектора xy мы будемъ называть число

$$\frac{1}{ik_1} \frac{(ab xy) - 1}{(ab xy) + 1}; \qquad (9)$$

его мы будемъ означать такимъ образомъ

$$T(xy) \quad , \text{ или } T_{xy}.$$

Воспользовавшись (6), получимъ для тензора выраженія

$$T_{xy} = \frac{1}{ik_1} \frac{\sqrt{f^2(xy) - f(xx)f(yy)}}{f(xy)} \qquad (10)$$

и

$$T_{xy} = \frac{1}{ik_1} \frac{\sqrt{\Phi(pp)}}{f(xy)}. \qquad (10')$$

Сравнивая (9) съ (5), видимъ, что тензоръ вектора связанъ съ длиной его соотношеніемъ

$$T_{xy} = \frac{1}{k_1} \operatorname{tang} k_1 \delta. \qquad (11)$$

Такъ какъ ангармоническое отношеніе представляетъ собой величину отвлеченную, то изъ равенства (5) слѣдуетъ, что k_1 величина именованная: ея измѣреніе есть $[L^{-1}]$, если черезъ L означимъ единицу длины. Какъ видно изъ формулы (9) тензоръ вектора представляетъ собой величину также именованную и имѣетъ измѣреніе длины $[L]$.

Обратимъ вниманіе на слѣдующія свойства длины и тензора вектора.

1. Тензоръ вектора и его длина мѣняютъ свой знакъ, если мы измѣнимъ направленіе вектора или его луча на противоположное. Ибо съ перемѣной послѣдовательности точекъ a и b, или x и y, ангармоническое отношеніе $(ab xy)$ замѣнится величиной обратной:

$$(ab xy) = 1/(ab yx) = 1/(ba xy).$$

2. Предположимъ, что точки x, y, z лежатъ на одной прямой. Принявъ одно и то же направленіе прямой за положи-

тельное для всѣхъ трехъ векторовъ xy, yz, xz, мы опредѣлимъ разстоянія $\delta_{xy}, \delta_{yz}, \delta_{xz}$ между точками x и y, y и z, x и z по формуламъ

$$\delta_{xy}=\frac{1}{2ik_1}\log(ab\,xy),\quad \delta_{yz}=\frac{1}{2ik_1}\log(ab\,yz),\quad \delta_{xz}=\frac{1}{2ik_1}\log(ab\,xz).$$

Въ силу извѣстнаго свойства ангармоническихъ отношеній:

$$(ab\,xy)(ab\,yz)=(ab\,xz)$$

эти три разстоянія будутъ связаны между собой ур.

$$\delta_{xy}+\delta_{yz}=\delta_{xy}.$$

Такимъ образомъ разстояніе между точками x и z равняется суммѣ разстояній между x и y, y и z. Это свойство разстояній мы будемъ называть свойствомъ сложимости.

3. Если два вектора равны, то длины и тензоры ихъ также равны. Обратно, если два вектора имѣютъ общій лучъ, одно и то же положительное направленіе и равные тензоры, то они сами равны.

4. Если одна изъ точекъ вектора лежитъ на абсалютѣ, то $(ab\,xy)$ равняется или нулю, или безконечности. Въ этомъ случаѣ длина вектора безконечно велика и

$$T_{xy}=\pm 1/ik_1.$$

Такимъ образомъ всѣ точки абсолюта находятся на безконечно большихъ разстояніяхъ отъ всѣхъ другихъ точекъ пространства.

5. Если точки вектора взаимно перпендикулярны (§ 23), то $(ab\,xy)=-1$,

$$\delta=\pm\pi/2k_1+n\pi/k_1\quad,\quad T_{xy}=\infty,$$

гдѣ n какое нибудь цѣлое число.

6. Если длина вектора и его тензоръ равны нулю, то $(ab\,xy)=1$, что возможно только въ двухъ случаяхъ: или точки x и y совпадаютъ и самъ векторъ равняется нулю, или точки a и b совпадаютъ и лучъ вектора касается абсолюта. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы будемъ говорить, что векторъ и его лучъ имѣютъ абсолютное направленіе. Если же лучъ вектора касается абсолюта и одна изъ точекъ x, y совпадаетъ съ a или b, то $(ab\,xy)$, δ и T_{xy} неопредѣленны.

7. Тензоръ вектора выражается черезъ длину помощью тангенса, (11). Въ эллиптическомъ пространствѣ, когда k_1

дѣйствительно, этотъ тангенсъ будетъ круговымъ, въ гиперболическомъ, когда k_1 число чисто-мнимое,—гиперболическимъ. Въ пространствѣ, кривизна котораго равняется нулю, какъ видно изъ равенства (11), тензоръ вектора равняется его длинѣ. Если, приведя функцію $f(xx)$ къ виду (1):

$$f(xx)=k_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+k_2^2x_4^2, \qquad (12)$$

положимъ въ (10) $k_1=0$, сокративъ предварительно вторую часть на k_1, то для T_{xy} получимъ

$$T_{xy}=\frac{\sqrt{(x_1y_4-x_4y_1)^2+(x_2y_4-x_4y_2)^2+(x_3y_4-x_4y_3)^2}}{k_2x_4y_4} \qquad (13)$$

Такое же выраженіе мы получили бы и для δ, если бы раскрыли истинное значеніе второй части (7), которая для $k_1=0$ принимаетъ неопредѣленный видъ 0:0.

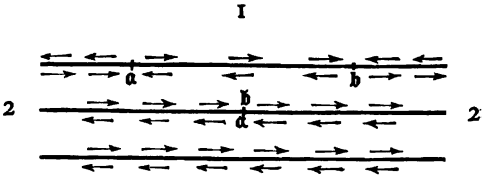
Разсмотримъ теперь подробнѣе тѣ случаи, когда точки вектора xy и коэффиціенты функціи $f(xx)$ дѣйствительны. Въ этихъ случаяхъ лучъ вектора дѣйствительная прямая, а точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ или дѣйствительны, или мнимы и сопряженны, и съ понятіемъ о направленіи луча мы можемъ соединить представленіе не только о послѣдовательности точекъ пересѣченія луча съ абсолютомъ, но и всѣхъ другихъ дѣйствительныхъ его точекъ.

Предположимъ, что точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ дѣйствительны. Вообразивъ на лучѣ точечный рядъ, мы можемъ считать его исходящимъ изъ начальной точки луча и идущимъ въ конечную, или, обратно, исходящимъ изъ конечной и идущимъ въ начальную. Условившись только первую изъ указанныхъ послѣдовательностей точекъ ряда считать направленіемъ луча, мы будемъ имѣть возможность по данному направленію луча (по данной послѣдовательности дѣйствительныхъ точекъ луча) отличать начальную точку луча отъ конечной и, обратно, выборомъ начальной и конечной точекъ задавать направленіе луча (послѣдовательность его дѣйствительныхъ точекъ). Такъ, направленіе на отдѣльныхъ участкахъ луча будетъ указываться верхними (см. чертежъ 8_1), стрѣлками, если мы за начальную точку луча примемъ точку $\mathfrak{a}$ и за конечную $\mathfrak{b}$, и нижними, если обратно $\mathfrak{b}$ примемъ за начальную и $\mathfrak{a}$—за конечную. Предѣльный случай, когда точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ совпадаютъ (напр. въ Эвклидовомъ пространствѣ, въ пространствѣ Лобачевскаго, если лучъ касается абсолюта) представленъ на чертежѣ 8_2. Тогда на всѣхъ участкахъ луча направленіе одинаково: или таково, какъ указано стрѣлками

верхними, или таково, какъ указано стрѣлками нижними. Въ этомъ случаѣ мы очевидно не имѣемъ возможности отличить по направленію луча его начальную и конечную точки, такъ какъ онѣ совпадаютъ.

Если точки a и b мнимы и сопряженны, то направленіе на всѣхъ участкахъ луча одинаково: или таково, какъ указано стрѣлками верхними, или таково, какъ указано стрѣлками нижними на чертежѣ 8_3. Чтобы имѣть возможность въ этомъ случаѣ по данному направленію на отдѣльныхъ дѣйствительныхъ участкахъ луча отличать его начальную и конечную точки и, обратно, выборомъ начальной и конечной точекъ луча задать послѣдовательность его дѣйствительныхъ точекъ, мы должны условиться въ слѣдующемъ.

Чертежъ 8.



Направленіе вектора xy и направленіе его луча могутъ совпадать и быть противоположны. Пусть x' точка луча xy перпендикулярная къ x, т. е. гармонично сопряженная съ x относительно точекъ a и b, въ которыхъ лучъ вектора пересѣкается съ абсолютомъ; будутъ ли точки a и b дѣйствительны или мнимы, точка x' всегда дѣйствительна. Вообразимъ себѣ точку, которая, выйдя изъ x, движется по лучу xy всегда въ одну и ту же сторону въ томъ направленіи, которое имѣетъ лучъ вблизи точки x. Если эта перемѣщающаяся точка совпадетъ раньше съ y чѣмъ съ x', то векторъ и его лучъ мы будемъ считать одинаково направленными, если же случится обратное, то направленіе вектора и его луча будемъ считать противоположными.

Условившись въ этомъ, вернемся къ занимающему насъ вопросу. Когда точки a и b мнимы и сопряженны, то ангармоническія отношенія $(ab xy)$ и $(ba xy)$ также мнимы. Такъ какъ

$$(ab xy) = 1/(ba xy),$$

то аргументы этихъ отношеній будутъ непремѣнно разныхъ знаковъ: одинъ положителенъ, другой отрицателенъ. Предполагая, что векторъ xy имѣетъ одинаковое направленіе съ его

лучомъ, мы условимся считать точку a начальной и b конечной, когда положителенъ аргументъ перваго изъ этихъ отношеній, и обратно точку b—начальной и a—конечной, когда положителенъ аргументъ второго отношенія. Это условіе вполнѣ характеризуетъ зависимость между послѣдовательностью начальной и конечной точекъ луча и направленіемъ на вещественныхъ участкахъ луча и позволяетъ всякій разъ, зная первую, найти послѣднее и обратно.

Посмотримъ, какой видъ имѣетъ тензоръ дѣйствительнаго вектора.

Предположимъ сначала, что начальная и конечная точки a и b луча xy дѣйствительны. Точка x и перпендикулярная къ ней x' раздѣляютъ всю прямую ab на два участка: на одномъ находится точка a, на другомъ—точка b. Припоминая, какъ измѣняется ангармоническое отношеніе $(abxy)$, когда точка y перемѣщается по прямой ab, мы увидимъ, что

$$T_{xy}=i\tau/k_1, \tag{14}$$

гдѣ $\tau>0$, когда y находится на участкѣ xbx', причемъ

$\tau=0$, если y совпадаетъ съ x,

$\tau=1$, если y совпадаетъ съ b,

$\tau=\infty$, если y совпадаетъ съ x'

и

$$T_{xy}=-i\tau/k_1, \tag{14'}$$

когда y находится на участкѣ xax', причемъ

$\tau=0$, если y совпадаетъ съ x,

$\tau=1$, если y совпадаетъ съ a,

$\tau=\infty$, если y совпадаетъ съ x'.

Такимъ образомъ тензоръ вектора xy имѣетъ видъ (14), когда направленіе вектора и его луча совпадаютъ, и видъ (14'), когда они противоположны.

Предположимъ затѣмъ, что точки a и b мнимы и сопряженны. Въ этомъ случаѣ, означивъ черезъ φ уголъ заключенный между $-\pi/2$ и $+\pi/2$, мы имѣемъ

$$(abxy)=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$$

и

$$T_{xy}=\operatorname{tang}\varphi/k_1=\tau/k_1 \tag{15}$$

гдѣ τ величина дѣйствительная. Припомнивъ, въ какихъ случаяхъ мы условились направленіе вектора и его луча считать одинаковыми и въ какихъ—противоположными, легко убѣдимся,

что $\tau > 0$, когда направленіе вектора xy совпадаетъ съ направленіемъ его луча, и $\tau < 0$, въ противномъ случаѣ.

Въ эллиптическомъ пространствѣ k_1 дѣйствительно и точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ всегда мнимы и сопряженны. Поэтому въ эллиптическомъ пространствѣ тензоръ дѣйствительнаго вектора опредѣляется по формулѣ (15) и всегда дѣйствителенъ.

Въ гиперболическомъ пространствѣ k_1 чисто-мнимое число и точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ могутъ быть дѣйствительны и мнимы. Если лучъ xy имѣетъ точки, лежащія внутри абсолюта, то онъ пересѣкается съ абсолютомъ въ дѣйствительныхъ точкахъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, и тензоръ вектора xy, опредѣляясь по формуламъ (14) или (14′), будетъ дѣйствителенъ. Если же лучъ xy лежитъ внѣ абсолюта, то точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ мнимы и сопряженны, и тензоръ вектора xy, какъ видно изъ формулы (15), будетъ чисто мнимымъ. Такимъ образомъ въ гиперболическомъ пространствѣ тензоръ дѣйствительнаго вектора число дѣйствительное, когда лучъ его реаленъ и чисто мнимое, когда лучъ его идеаленъ.

Въ параболическомъ пространствѣ тензоръ вектора равняется его длинѣ и, опредѣляясь формулой (13), дѣйствителенъ для дѣйствительнаго вектора. Мы условимся считать его положительнымъ, когда лучъ и векторъ имѣютъ одинаковое направленіе, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ.

47. **Тензоръ ротора.** — Плоскости ротора мы отличаемъ одну отъ другой: одну изъ нихъ мы называемъ начальной, другую—конечной. Послѣдовательность плоскостей ротора мы будемъ называть направленіемъ ротора.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ двѣ плоскости касательныя къ абсолюту и проведенныя черезъ нѣкоторую прямую. Принявъ одну изъ нихъ, напримѣръ $\mathfrak{A}$, за начальную, другую, $\mathfrak{B}$, за конечную плоскости ротора $\mathfrak{AB}$, мы будемъ называть первую начальной плоскостью прямой, вторую — конечной, а направленіе ротора $\mathfrak{AB}$—направленіемъ вращенія вокругъ прямой. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вращенію вокругъ оси всякаго ротора можно приписать опредѣленное направленіе; его мы будемъ называть положительнымъ направленіемъ вращенія вокругъ оси ротора или, короче, направленіемъ оси ротора.

Возьмемъ какой нибудь роторъ XY и, приписавъ его оси направленіе, означимъ черезъ $\mathfrak{A}$ начальную плоскость оси, черезъ $\mathfrak{B}$ конечную. Угломъ ротора XY или угломъ между плоскостями XY мы будемъ называть величину

$$\theta = \frac{1}{2ik_2} \log(\mathfrak{AB}XY), \qquad (16)$$

гдѣ $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)$ ангармоническое отношеніе плоскостей $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$, X, Y, k_2' — коэффиціентъ въ ур. (1) абсолюта и $i=\sqrt{-1}$. Такъ какъ логариѳмъ представляетъ собой многозначную функцію и значенія ея для даннаго аргумента опредѣляются до величинъ

$$2n\pi i,$$

гдѣ n цѣлое число, то уголъ θ можетъ имѣть безчисленное множество значеній, различающихся на величины кратныя отъ π/k_2.

Изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ ясно, что уголъ ротора XY мы можемъ выразить черезъ координаты плоскостей X и Y такимъ образомъ:

$$\theta=\frac{1}{2ik_2}\log\frac{F(XY)+\sqrt{F^2(XY)-F(XX)F(YY)}}{F(XY)-\sqrt{F^2(XY)-F(XX)F(YY)}} \qquad (17)$$

или

$$\theta=\frac{1}{2ik_2}\log\frac{F(XY)+\sqrt{\Phi(PP)}}{F(XY)-\sqrt{\Phi(PP)}} \qquad (17')$$

гдѣ

$$\Phi(PP)=-\sum_{ik}\sum_{lh}a_{ik,lh}P_{ik}P_{lh} \quad (i,k=1,2,3,4) \qquad (18)$$

представляетъ собой квадратичную функцію шести перемѣнныхъ

$$P_{ik}=X_iY_k-X_kY_i, \qquad (i,k=1,2,3,4)$$

коэффиціенты которой

$$a_{ik,lh}=A_{ik}A_{lh}-A_{ih}A_{lk}$$

суть миноры второго порядка опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.$$

Тензоромъ ротора XY мы будемъ называть величину

$$\frac{1}{ik_2}\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)-1}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)+1}. \qquad (19)$$

Означая тензоръ ротора XY черезъ

$T(XY)$ или T_{XY},

мы имѣемъ для него такія выраженія

$$T_{XY}=\frac{1}{ik_2}\,\frac{\sqrt{F^2(XY)-F(XX)F(YY)}}{F(XY)}\,, \tag{20}$$

$$T_{XY}=\frac{1}{ik_2}\,\frac{\sqrt{\Phi(PP)}}{F(XY)}\,. \tag{20'}$$

Сравнивая (16) съ (19), видимъ, что тензоръ ротора связанъ съ его угломъ соотношеніемъ

$$T_{XY}=\frac{1}{k_2}\tan g k_2\theta. \tag{21}$$

Такъ какъ ангармоническое отношеніе представляетъ собой величину отвлеченную, то изъ равенства (16) слѣдуетъ, что k_2 величина именованная: ея измѣреніе есть $[A^{-1}]$, если черезъ A означимъ единицу угла. Какъ видно изъ формулы (19) тензоръ ротора представляетъ собой величину также именованную и имѣетъ измѣреніе угла $[A]$. Равенство (0) показываетъ, что кривизна $\varkappa^2$ имѣетъ измѣреніе $[A^2L^{-2}]$.

Замѣтимъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда одна и та же прямая служитъ лучомъ для вектора xy и осью для ротора XY, такъ что точки x и y лежатъ на линіи пересѣченія плоскостей X и Y, между функціями $\Phi(PP)$ и $\phi(pp)$ существуетъ весьма простое соотношеніе. Въ аналитической геометріи доказывается, что въ этомъ случаѣ

$$P_{12}=\sigma p_{34},\ P_{13}=\sigma p_{42},\ P_{14}=\sigma p_{23},$$
$$P_{34}=\sigma p_{12},\ P_{42}=\sigma p_{13},\ P_{23}=\sigma p_{14},$$

гдѣ σ нѣкоторый множитель пропорціональности. Съ другой стороны вслѣдствіе извѣстнаго свойства опредѣлителей, составленныхъ изъ миноръ перваго порядка другого опредѣлителя, мы имѣемъ

$$\Delta(a_{12}a_{34}-a_{14}a_{32})=(A_{21}A_{43}-A_{23}A_{41}),$$
$$\Delta(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})=(A_{31}A_{44}-A_{41}A_{34}),\ \text{и т. д.}$$

а потому $\Phi(PP)=\sigma^2\Delta\phi(pp).$

Отсюда

$$T_{XY}=T_{xy}\varkappa\sigma\sqrt{\Delta}\,\frac{f(xy)}{F(XY)}\,. \tag{10,20}$$

Обратимъ вниманіе на слѣдующія свойства тензора и угла ротора.

1. Тензоръ ротора и его уголъ мѣняютъ свой знакъ, если мы измѣнимъ направленіе ротора или его оси на противоположное. Ибо съ перемѣной послѣдовательности плоскостей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, или X и Y, ангармоническое отношеніе $(\mathfrak{AB}XY)$ замѣнится величиной обратной:

$$(\mathfrak{AB}XY)=1/(\mathfrak{BA}XY)=1/(\mathfrak{AB}YX).$$

2. Предположимъ, что плоскости X, Y, Z проходятъ черезъ одну и ту же прямую. Принявъ одно и то же направленіе вращенія вокругъ этой прямой за положительное для всѣхъ роторовъ XY, YZ и XZ и означивъ черезъ $\theta_{XY}, \theta_{YZ}, \theta_{XZ}$ углы между плоскостями X и Y, Y и Z, X и Z, имѣемъ

$$\theta_{XY}+\theta_{YZ}=\theta_{XZ}.$$

Такимъ образомъ углы между плоскостями обладаютъ свойствомъ сложимости.

3. Если два ротора равны, то и тензоры и углы ихъ также равны: Обратно, если два ротора имѣютъ общую ось, одно и то же положительное направленіе и равные тензоры, то они и сами равны.

4. Если одна изъ плоскостей ротора касается абсолюта, то $(\mathfrak{AB}XY)$ равняется или нулю, или безконечности и

$$\theta=\infty,\ \mathrm{T}_{XY}=\pm 1/ik_2.$$

Такимъ образомъ уголъ между плоскостью касательной къ абсолюту и всякой другой безконечно великъ.

5. Если плоскости ротора взаимно перпендикулярны (§ 23), то $(\mathfrak{AB}XY)=-1$,

$$\theta=\pm\pi/2k_2+n\pi/k_2,\ \mathrm{T}_{XY}=\infty.$$

6. Если уголъ ротора и его тензоръ равняются нулю, то $(\mathfrak{AB}XY)=1$, что возможно только въ двухъ случаяхъ: или плоскости X, Y совпадаютъ и самъ роторъ равняется нулю, или плоскости $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ совпадаютъ и ось ротора касается абсолюта. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы будемъ говорить, что роторъ и его ось имѣютъ абсолютное направленіе. Если же ось ротора касается абсолюта и при томъ одна изъ плоскостей его или обѣ совпадаютъ съ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то $(\mathfrak{AB}XY)$, θ и T_{XY} неопредѣленны.

7. Въ эллиптическомъ и гиперболическомъ пространствахъ и въ пространствѣ, кривизна котораго равняется нулю, k_2 дѣйствительно, и тензоръ ротора выражается круговымъ тангенсомъ его угла. Въ пространствѣ безконечно большой кривизны $k_2=0$, и тензоръ ротора равняется его углу. Если, приведя функцію $F(XX)$ къ виду (2):

$$F(XX)=k_2^2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)+k_1^2X_4^2, \qquad (22)$$

положимъ въ (20) $k_2=0$, предварительно сокративъ вторую часть на k_2, то для T_{XY} получимъ формулу:

$$T_{XY}=\frac{\sqrt{(X_1Y_4-X_4Y_1)^2+(X_2Y_4-X_4Y_2)^2+(X_3Y_4-X_4Y_3)^2}}{k_1X_4Y_4}. \qquad (23)$$

Такую же формулу получили бы и для θ, раскрывъ истинное значеніе (17), которая для $k_2=0$ принимаетъ неопредѣленный видъ.

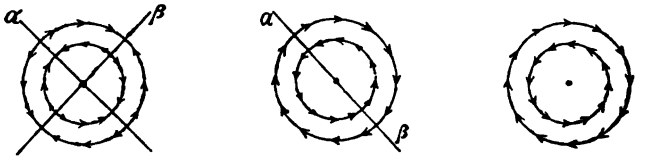
Разсмотримъ теперь подробнѣе тѣ случаи, когда плоскости ротора XY и коэффиціенты функціи $F(XX)$ дѣйствительны. Въ этихъ случаяхъ ось ротора дѣйствительная прямая и плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ или дѣйствительны, или мнимы и сопряженны, и съ понятіемъ о направленіи оси (направленіи вращенія вокругъ оси) мы можемъ соединить представленіе не только о послѣдовательности плоскостей проведенныхъ черезъ ось и касательныхъ къ абсолюту, но и всѣхъ другихъ дѣйствительныхъ плоскостей проходящихъ черезъ ось.

Предположимъ, что плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны. Представивъ себѣ пучекъ плоскостей, осью которому служитъ наша ось, мы можемъ считать этотъ пучекъ исходящимъ изъ начальной плоскости оси и идущимъ въ конечную, или, обратно, исходящимъ изъ конечной плоскости и идущимъ въ начальную. Условившись только первую изъ указанныхъ послѣдовательностей плоскостей пучка считать направленіемъ оси, мы будемъ имѣть возможность по данному направленію оси (по данной послѣдовательности дѣйствительныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось) отличать начальную плоскость отъ конечной и обратно выборомъ начальной и конечной плоскостей оси задавать направленіе оси (послѣдовательность плоскостей проходящихъ черезъ ось): Такъ, если предположимъ, что плоскость чертежа перпендикулярна къ оси и пересѣкается съ плоскостями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ по прямымъ α и β (см. чертежъ 9_1), то направленіе (послѣдовательность плоскостей) въ

различныхъ участкахъ пучка будетъ указываться наружными стрѣлками, если мы плоскость $\mathfrak{A}$ примемъ за начальную и $\mathfrak{B}$— за конечную, и внутренними, если примемъ $\mathfrak{B}$ за начальную и $\mathfrak{A}$—за конечную. Предѣльный случай, когда плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадаютъ представленъ на чертежѣ 9_2 (напр. въ пространствѣ безконечно большой кривизны, въ пространствѣ Лобачевскаго, когда ось касается абсолюта). Теперь направленіе вращенія на всѣхъ участкахъ пучка будетъ одинаково и будетъ таково, какъ указано наружными стрѣлками, или таково, какъ указано внутренними.

Если плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны, то направленіе вращенія вокругъ оси будетъ также на всѣхъ участкахъ пучка одинаково: или таково какъ указано наружными, или таково, какъ указано внутренними стрѣлками на

Чертежъ 9.



1 2 3

чертежѣ 9_3. Чтобы имѣть возможность въ этомъ случаѣ по данному направленію оси (по данной послѣдовательности плоскостей пучка) различать ея начальную и конечную плоскости и, обратно, выборомъ начальной и конечной плоскостей оси задать направленіе оси (послѣдовательность дѣйствительныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось), мы должны условиться въ слѣдующемъ.

Направленіе ротора XY и направленіе вращенія вокругъ его оси могутъ совпадать и быть противоположны. Пусть X' плоскость перпендикулярная къ X и проходящая черезъ ось; плоскость X' всегда дѣйствительна независимо отъ того будутъ ли плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны или нѣтъ. Вообразимъ себѣ плоскость, которая выйдя изъ положенія плоскости X вращается вокругъ оси XY всегда въ одну и ту же сторону въ направленіи, которое имѣетъ пучекъ плоскостей на участкѣ вблизи плоскости X. Если эта перемѣщающаяся плоскость совпадаетъ съ плоскостью Y раньше чѣмъ съ X', то роторъ и его ось мы будемъ считать одинаково направленными, если же случится обратное, то направленіе ротора и его оси будемъ считать противоположными.

Условившись въ этомъ, вернемся къ занимающему насъ вопросу. Когда плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны, то ангармоническія отношенія $(\mathfrak{AB}XY)$ и $(\mathfrak{BA}XY)$ также мнимы. Такъ какъ

$$(\mathfrak{AB}XY)=1/(\mathfrak{BA}XY),$$

то аргументы этихъ отношеній будутъ непремѣнно разныхъ знаковъ. Предполагая, что роторъ XY имѣетъ одинаковое направленіе съ его осью, мы условимся считать плоскость $\mathfrak{A}$ начальной и $\mathfrak{B}$ — конечной, когда положителенъ аргументъ перваго изъ этихъ отношеній, $(\mathfrak{AB}XY)$, и обратно плоскость $\mathfrak{B}$—начальной и $\mathfrak{A}$—конечной, когда положителенъ аргументъ второго отношенія, $(\mathfrak{BA}XY)$. Это условіе вполнѣ характеризуетъ зависимость между послѣдовательностью плоскостей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и всѣхъ другихъ дѣйствительныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось, и позволяетъ всякій разъ, зная первую, опредѣлить послѣднюю и обратно.

Посмотримъ какой видъ имѣетъ тензоръ дѣйствительнаго ротора.

Предположимъ, во-первыхъ, что плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны. Плоскость X и перпендикулярная къ ней X' раздѣляютъ пучекъ съ осью $\mathfrak{AB}$ на два участка: въ одномъ находится плоскость $\mathfrak{A}$, въ другомъ—плоскость $\mathfrak{B}$. Припоминая, какъ измѣняется ангармоническое отношеніе $(\mathfrak{AB}XY)$, когда плоскость Y вращается вокругъ оси $\mathfrak{AB}$, мы увидимъ изъ (19), что

$$T_{XY}=i\tau/k_2, \tag{24}$$

гдѣ τ число положительное, когда плоскость Y находится въ участкѣ $X\mathfrak{B}X'$, причемъ

$\tau=0$, если Y совпадаетъ съ X,
$\tau=1$, если Y совпадаетъ съ $\mathfrak{B}$,
$\tau=\infty$, если Y совпадаетъ съ X',

и

$$T_{XY}=-i\tau/k_2 \tag{24'}$$

когда плоскость Y находится въ участкѣ $X\mathfrak{A}X'$, причемъ

$\tau=0$, если Y совпадаетъ съ X,
$\tau=1$, если Y совпадаетъ съ $\mathfrak{A}$,
$\tau=\infty$, если Y совпадаетъ съ X'.

Такимъ образомъ тензоръ ротора XY имѣетъ видъ (24), когда направленіе ротора и его оси совпадаютъ, и видъ (24'), когда они противоположны.

Предположимъ, во-вторыхъ, что плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны. Тогда, означая черезъ φ нѣкоторый уголъ, заключенный между $-\pi/2$ и $+\pi/2$, мы имѣемъ

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$$

и

$$T_{XY}=\operatorname{tang}\varphi/k_2=\tau/k_2, \qquad (25)$$

гдѣ τ величина дѣйствительная. Припомнивъ, въ какихъ случаяхъ мы условились направленіе ротора и его оси считать одинаковыми и въ какихъ — противоположными, легко убѣдимся, что $\tau>0$, когда направленіе ротора XY совпадаетъ съ направленіемъ его оси, и $\tau<0$—въ противномъ случаѣ.

Въ эллиптическомъ и параболическомъ пространствахъ k_2 дѣйствительно, а плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны. Поэтому въ этихъ пространствахъ тензоръ дѣйствительнаго ротора опредѣляется формулой (25) и всегда дѣйствителенъ.

Въ гиперболическомъ пространствѣ k_2 дѣйствительно, а плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны или мнимы и сопряженны. Если ось ротора имѣетъ точки, лежащія внутри абсолюта, то плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны, и тензоръ ротора опредѣляясь формулой (25), дѣйствителенъ. Если же ось ротора лежитъ внѣ абсолюта, то плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны, и тензоръ ротора, какъ видно изъ формулъ (24) и (24'), число чисто-мнимое. Такимъ образомъ тензоръ дѣйствительнаго ротора въ гиперболическомъ пространствѣ дѣйствителенъ, когда ось его реальна, и мнимый, когда она идеальна.

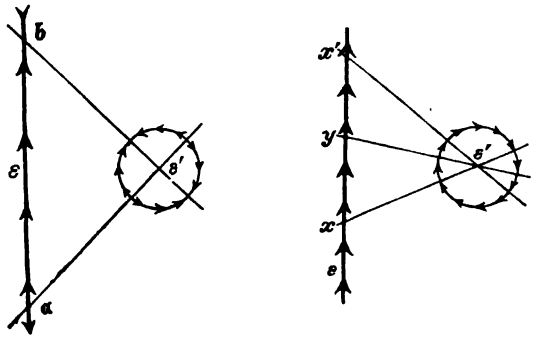
Въ пространствѣ безконечно большой кривизны тензоръ ротора равняется его углу и, опредѣляясь формулой (23), дѣйствителенъ для дѣйствительнаго ротора. Мы условимся считать его положительнымъ, когда роторъ и его ось имѣютъ одинаковое направленіе, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ.

48. **Тензоры вектора и полярнаго съ нимъ ротора.**— Пусть ε и ε' двѣ взаимныя поляры. Означимъ буквами a и b точки пересѣченія ε съ абсолютомъ и буквами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ плоскости, проходящія черезъ ε' и касательныя къ абсолюту. Пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что вслѣдствіе полярности ε и ε' плоскость $\mathfrak{A}$ проходитъ черезъ a, плоскость $\mathfrak{B}$—черезъ

$\mathfrak{b}$, условимся направленіе линіи ε и направленіе вращенія вокругъ ея поляры ε' считать соотвѣтствующими, если начальная точка линіи ε лежитъ въ начальной плоскости линіи ε', и конечная—въ конечной. Въ силу этого условія каждому направленію прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное направленіе вращенія вокругъ ея поляры и каждому направленію вращенія вокругъ прямой—опредѣленное направленіе ея поляры.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда коэффиціенты ур. абсолюта дѣйствительны, взаимныя поляры или обѣ дѣйствительны, или обѣ мнимы. Если онѣ обѣ дѣйствительны, то мы можемъ выразить зависимость между направленіемъ прямой и соотвѣтствующимъ направленіемъ вращенія вокругъ ея поляры еще иначе. Въ самомъ дѣлѣ, вообразивъ пучекъ плоскостей съ осью ε' и точечный рядъ расположенный на линіи ε, отнесемъ ихъ одинъ къ другому такъ, чтобы они были перспективны; тогда послѣдовательность точекъ ряда опредѣлитъ послѣдовательность плоскостей пучка и, если первая характеризуетъ направленіе линіи ε, то вторая будетъ характеризовать соотвѣтствующее направленіе вращенія вокругъ оси ε'. Это очевидно въ томъ случаѣ, когда точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и плоскости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дѣйствительны (см. чертежъ 10_1; плоскость чертежа проходитъ черезъ линію ε и перпендикулярна къ ε', съ кото-

Чертежъ 10.



1 2

рой она пересѣкается въ точкѣ означенной буквой ε'). Чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго также и тогда, когда точки $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ и плоскости $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ мнимы и сопряженны, возьмемъ на линіи ε двѣ точки x,y и проведемъ чрезъ нихъ и линію ε' двѣ плоскости X,Y. Такъ какъ ангармоническія отношенія $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy)$ и $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY)$ равны, то аргументы ихъ будутъ одновременно или положительны, или отрицательны. Если предполо-

жимъ для опредѣленности, что они положительны, то въ силу нашего условія (§§ 46, 47) направленіе вектора xy будетъ одинаково съ направленіемъ луча ε, а соотвѣтствующее направленіе вращенія вокругъ оси ε' одинаково съ направленіемъ ротора XY. Направленія луча ε и оси ε' будутъ слѣдовательно таковы, какъ указано на чертежѣ 10_2 (на немъ точка x' перпендикулярна къ x), и очевидно, что послѣдовательность точекъ ряда ε будутъ опредѣляться послѣдовательностью плоскостей пучка съ осью ε', если рядъ будемъ считать перспективой пучка. Вслѣдствіе указаннаго свойства соотвѣтствующихъ направленій, мы можемъ назвать эти направленія перспективными.

Предположимъ, что линія ε служитъ лучомъ вектора xy, а линія ε' осью ротора XY полярнаго съ векторомъ xy. Принявъ точку $\mathfrak{a}$ и плоскость $\mathfrak{A}$ за начальныя для луча ε и оси ε' и приписавъ такимъ образомъ лучу ε и оси ε' соотвѣтствующія направленія, будемъ считать эти направленія положительными для вектора xy и полярнаго съ нимъ ротора XY. Такъ какъ

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy)=(\mathfrak{A}\mathfrak{B}XY), \qquad (\S\ 31)$$

то сравнивая формулы (16) и (19) съ (5) и (9), мы имѣемъ соотношенія

$$k_1\delta=k_2\theta, \qquad (26)$$

$$k_1\mathrm{T}_{xy}=k_2\mathrm{T}_{XY}, \qquad (27)$$

гдѣ δ и T_{xy} длина и тензоръ вектора xy, θ и T_{XY}—уголъ и тензоръ ротора XY. Отсюда такая теорема.

Теорема.—*Произведеніе тензора (длины) вектора на k_1 равняется произведенію тензора (угла) полярнаго съ векторомъ ротора на k_2, если положительныя направленія вектора и ротора соотвѣтствуютъ одно другому.*

Плоскости X, Y перпендикулярны къ лучу xy; если мы предположимъ, что векторъ xy не только поляренъ съ роторомъ XY, но и перспективенъ съ нимъ, то плоскости X, Y пройдутъ черезъ точки x, y и изъ соотношенія (26) будетъ слѣдовать, что двѣ плоскости перпендикулярныя къ прямой линіи и проведенныя черезъ точки этой линіи, разстояніе между которыми равняется δ, образуютъ уголъ равный $\delta\varkappa$; и двѣ плоскости, составляющія между собой уголъ θ, отсѣкаютъ на полярѣ ребра векторъ, длина котораго равняется $\theta/\varkappa$.

49. Углы и разстоянія между точками, линіями и плоскостями.—Существуетъ только одна прямая перпендикулярная къ двумъ точкамъ x и y: поляра линіи xy. Уголъ между плоскостями, проведенными черезъ эту прямую и точки x и y, называется угломъ между этими послѣдними. Изъ теоремы предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что уголъ θ и разстояніе δ между точками x и y связаны соотношеніемъ $\theta = \varkappa\delta$.

Существуетъ только одна прямая перпендикулярная къ двумъ плоскостямъ X и Y: поляра оси XY. Разстояніе между точками пересѣченія этой прямой съ плоскостями X и Y называется растояніемъ между этими послѣдними. Изъ теоремы предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что уголъ θ и разстояніе δ между плоскостями X и Y связаны соотношеніемъ $\theta = \varkappa\delta$.

Есть только одна прямая, проходящая черезъ точку x и перпендикулярная къ плоскости Y: прямая, соединяющая x съ точкой y, полюсомъ плоскости Y. Разстояніе между x и точкой пересѣченія этой прямой съ плоскостью Y называется разстояніемъ точки x отъ плоскости Y.—Есть только одна прямая, лежащая въ плоскости Y и перпендикулярная къ точкѣ x: линія пересѣченія Y съ плоскостью X перпендикулярной къ x. Уголъ между плоскостью, проведенной черезъ эту прямую и точку x, и плоскостью Y называется угломъ между точкой x и плоскостью Y. Уголъ θ и разстояніе δ между точкой x и плоскостью Y связаны въ силу теоремы предыдущаго параграфа соотношеніемъ $\theta = \varkappa\delta$.

Есть только одна прямая, проходящая черезъ точку x и и перпендикулярная къ прямой α: линія пересѣченія плоскостей проведенныхъ черезъ точку x, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ линію α, а другая — черезъ ея поляру. Разстояніе между x и точкой пересѣченія этой прямой съ α называется разстояніемъ точки x до прямой α.—Есть только одна прямая перпендикулярная къ точкѣ x и прямой α: линія, соединяющая точки пересѣченія линіи α и ея поляры съ плоскостью перпендикулярной къ x. Уголъ между двумя, проведенными черезъ эту прямую, плоскостями, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ точку x, а другая черезъ прямую α, называется угломъ между точкой x и прямой α. Разстояніе δ и уголъ θ между точкой x и прямой α связаны, какъ видно изъ теоремы предыдущаго параграфа, соотношеніемъ $\theta = \varkappa\delta$.

Есть только одна прямая, лежащая въ плоскости Y и перпендикулярная къ линіи α: линія соединяющая точки пересѣченія Y съ линіей α и ея полярой. Уголъ между плоскостью, которая проходитъ черезъ эту прямую и линію α, и

плоскостью Y называется угломъ между прямой α и плоскостью Y.—Есть только одна прямая перпендикулярная къ плоскости Y и прямой α: линія проведенная черезъ точку y, полюсъ плоскости Y, и пересѣкающая линію α и ея поляру. Разстояніе между точками пересѣченія этой прямой съ линіей α и плоскостью Y называется разстояніемъ между послѣдними. Уголъ θ и разстояніе δ между прямой α и плоскостью Y связаны, какъ видно изъ теоремы предыдущаго параграфа, соотношеніемъ $\theta = \varkappa\delta$.

Углы и разстоянія между двумя прямыми линіями, тѣсно связанные съ весьма важнымъ понятіемъ теоріи векторовъ—понятіемъ о комплексномъ углѣ между двумя прямыми, будутъ изслѣдованы нами ниже особенно подробно.

50. **Теорія векторовъ и комплексныя числа.** — Проэктивная теорія векторовъ можетъ быть значительно упрощена, если мы воспользуемся тѣми системами комплексныхъ чиселъ съ двумя единицами, которыя обладаютъ модулемъ операціи умноженія и служили предметомъ нашихъ изслѣдованій въ первой главѣ. Мы знаемъ, что, принявъ модуль операціи умноженія за одну изъ комплексныхъ единицъ, мы приводимъ комплексныя числа, о которыхъ идетъ рѣчь, въ виду $x_1 + x_2\omega$, причемъ вторая степень единицы ω опредѣляется характеристическимъ равенствомъ

$$\omega^2 = -\varkappa_1\varkappa_2 + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\omega.$$

Въ теоріи векторовъ пространства съ кривизной $\varkappa^2$ мы будемъ пользоваться системой комплексныхъ чиселъ, для которой

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \varkappa,$$

и характеристическое равенство имѣетъ видъ

$$\omega^2 = \varkappa^2. \tag{28}$$

Эту систему, а равнымъ образомъ и всякую другую, въ которую она можетъ быть преобразована введеніемъ новыхъ единицъ, мы будемъ называть соотвѣтствующею пространству съ кривизной $\varkappa^2$. Такъ, напримѣръ, система комплексныхъ чиселъ вида $x_1 + x_2\omega'$ съ характеристическимъ равенствомъ

$$\omega'^2 = 1/\varkappa^2 \tag{29}$$

также соотвѣтствуетъ пространству съ кривизной $\varkappa^2$, ибо ха-

рактеристическое равенство (28) преобразуется въ (29), если вмѣсто ω введемъ новую единицу

$$\omega' = \omega/\varkappa^2.$$

Итакъ каждому пространству соотвѣтствуютъ свои системы комплексныхъ чиселъ. Такъ какъ, обратно, всякую систему комплексныхъ чиселъ съ модулемъ операціи умноженія можно привести къ виду $x_1 + x_2\omega$ съ характеристическимъ равенствомъ (28), то каждой системѣ комплексныхъ чиселъ въ свою очередь будутъ соотвѣтствовать нѣкоторыя пространства.

Припоминая нашу классификацію комплексныхъ чиселъ съ двумя единицами и сказанное въ § 45, мы видимъ такимъ образомъ, что пространствамъ, у которыхъ кривизна не равняется ни нулю, ни безконечности, а абсолютъ не вырождается ни въ конусъ, ни въ коническое сѣченіе, соотвѣтствуютъ системы комплексныхъ чиселъ перваго класса, а пространствамъ, у которыхъ кривизна равняется нулю или безконечности, а абсолютъ обращается въ коническое сѣченіе или въ конусъ—системы второго класса. Далѣе, сопоставляя пространства, у которыхъ ур. абсолюта имѣетъ дѣйствительные коэффиціенты, съ типами комплексныхъ чиселъ, видимъ, что эллиптическому пространству соотвѣтствуютъ гиперболическія системы, гиперболическому—эллиптическія, параболическому и полярнымъ съ нимъ—параболическія.

Введеніе въ теорію векторовъ системы комплексныхъ чиселъ съ модулемъ операціи умноженія нельзя оправдать какими либо апріорными соображеніями. Значеніе ихъ въ теоріи векторовъ будетъ выясняться постепенно въ теченіе этой главы, и въ слѣдующей мы покажемъ, что воспользовавшись комплексными числами, мы приходимъ къ весьма простому методу, который позволяетъ намъ открывать новыя теоремы механики и геометріи пространствъ съ постоянной кривизной.

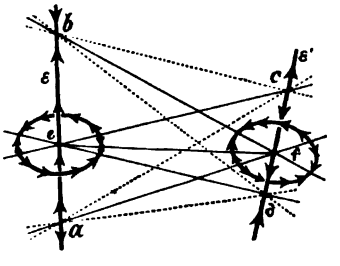
Два весьма важныхъ понятія связаны съ комплексными числами: понятіе о тензорѣ мотора и понятіе о комплексномъ углѣ между двумя прямыми линіями. Понятіе о тензорѣ въ свою очередь связано съ понятіемъ объ оси мотора и винтовомъ направленіи. Мы уже знаемъ, что называется осью мотора; объяснимъ теперь, что мы будемъ разумѣть подъ винтовымъ направленіемъ.

51. **Соотвѣтствующія и винтовое направленія.**—Абсолютъ, какъ поверхность второго порядка, представляетъ собой линей-

чатую поверхность. Существуетъ двѣ системы прямолинейныхъ производящихъ абсолюта. Двѣ образующія по одной изъ каждой системы лежатъ въ каждой плоскости касательной къ абсолюту и проходятъ черезъ каждую точку абсолюта. Образующія одной и той же системы не пересѣкаются между собой, но каждая образующая одной системы пересѣкаетъ каждую образующую другой: пользуясь этимъ, мы всегда имѣемъ возможность отличать образующія одной системы отъ образующихъ другой. Мы назовемъ одну систему буквой ξ, а другую—буквой η.

Пусть ε и ε' двѣ взаимныя поляры, a,b точки пересѣченія ε, c,d — точки пересѣченія ε' съ абсолютомъ, (см. чертежъ 11_1); линіи ac,bd и ad,bc будутъ прямолинейными образующими абсолюта, первыя двѣ принадлежатъ къ одной системѣ, скажемъ къ системѣ ξ, вторыя двѣ—къ другой, къ системѣ η. Плоскости acd, bcd, cab, dab касаются абсолюта въ точкахъ a,b,c,d соотвѣтственно.

Чертежъ 11.



I

Напомнивъ это, условимся слѣдующія направленія считать соотвѣтствующими.

Направленіе прямой и направленіе вращенія вокругъ нея будемъ считать соотвѣтствующими, если прямолинейная образующая, проведенная черезъ начальную точку прямой въ ея начальной плоскости принадлежитъ къ системѣ ξ. Такъ, направленіе ε и направленіе вращенія вокругъ ε, для которыхъ a и abc служатъ начальными точкой и плоскостью будутъ соотвѣтствующими, ибо образующая ac, принадлежащая къ системѣ ξ, проходитъ черезъ a и лежитъ въ плоскости abc.

Направленіе прямой и направленіе ея поляры будемъ считать соотвѣтствующими, если образующія абсолюта, которыя соединяютъ начальную точку прямой съ начальной точкой

ея поляры и конечную—съ конечной, обѣ принадлежатъ къ системѣ ξ. Такъ, направленія ε и ε', для которыхъ начальными точками служитъ a и c, будутъ соотвѣтствующими, ибо линіи ac и bb принадлежатъ къ системѣ ξ.

Направленіе вращенія вокругъ прямой и направленіе вращенія вокругъ ея поляры будемъ считать соотвѣтствующими, если образующія абсолюта, по которымъ пересѣкаются начальная плоскость прямой съ начальной плоскостью ея поляры и конечная—съ конечной, обѣ принадлежатъ къ системѣ ξ. Такъ, направленія вращенія вокругъ ε и ε', для которыхъ начальными плоскостями служатъ abc и cba, будутъ соотвѣтствующими, ибо линія ac пересѣченія этихъ плоскостей и линія bb пересѣченія плоскостей bab и cbb обѣ принадлежатъ къ системѣ ξ.

Эти условія позволяютъ намъ всегда, независимо отъ того, будутъ-ли разсматриваемыя прямыя дѣйствительны или мнимы и будетъ-ли ур. абсолюта имѣть дѣйствительные коэффиціенты или нѣтъ, опредѣлять соотвѣтствующія направленія, если выборъ той системы образующихъ, которую мы назовемъ системой ξ, сдѣланъ, и обратно—различать образующія, принадлежащія къ системѣ ξ, отъ образующихъ другой системы, если мы имѣемъ средство опредѣлять какую нибудь пару соотвѣтствующихъ направленій. Напомнимъ, что въ § 48 мы разсматривали еще одну пару соотвѣтствующихъ направленій, которыя мы назвали перспективными направленіями. Присоединяя ихъ къ только что перечисленнымъ, мы будемъ имѣть всего четыре соотвѣтствующихъ направленія: направленія двухъ взаимныхъ поляръ и направленія вращенія вокругъ нихъ. Разсматривая чертежъ 11_1, не трудно убѣдиться, что два направленія, соотвѣтствующія одному и тому же третьему, соотвѣтствуютъ одно другому и что всѣ соотвѣтствующія направленія измѣняются на противоположныя, если это случится съ однимъ изъ нихъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло съ дѣйствительными прямыми и когда коэффиціенты ур. абсолюта также дѣйствительны, наши условія, служащія для того, чтобы различать соотвѣтствующія направленія, мы можемъ замѣнить другими. Съ этою цѣлью вообразимъ себѣ прямую ef, пересѣкающую взаимныя поляры ε и ε' и встрѣчающую абсолютъ, если это возможно, въ дѣйствительныхъ точкахъ, и заставимъ эту прямую перемѣщаться такимъ образомъ, чтобы точка e двигалась по линіи ε, а точка f по линіи ε', иначе говоря такъ, чтобы линія ef оставалась перпендикулярной къ

къ ε, такъ и къ ε'. Припишемъ линіи ε опредѣленное направленіе и предположимъ, что точка e перемѣщается по прямой ε въ томъ направленіи, которое эта прямая имѣетъ на своемъ участкѣ вблизи первоначальнаго положенія точки e; точка f пойдетъ тогда или по направленію къ $\mathfrak{c}$, или по направленію къ $\mathfrak{b}$ (см. чертежъ 11_1). Въ первомъ случаѣ направленіе движенія точки e и направленіе вращенія линіи ef вокругъ линіи ε будутъ связаны между собой такъ, какъ связаны направленіе поступательнаго и вращательнаго движенія лѣваго винта въ своей гайкѣ, во-второмъ — какъ соотвѣтствующія движенія праваго (обыкновеннаго) винта. Мы условимся выбирать движеніе точки f всегда такимъ образомъ, чтобы имѣлъ мѣсто первый случай. Вслѣдствіе этого условія направленіемъ линіи ε опредѣлятся направленія движенія точки f по линіи ε' и вращенія плоскотей $\mathfrak{a}\mathfrak{b}f$ и $\mathfrak{c}\mathfrak{b}e$ вокругъ осей ε и ε', а тѣмъ самымъ опредѣлятся направленія точечнаго ряда, лежащаго на линіи ε', и пучковъ плоскостей съ осями ε и ε' вблизи первоначальнаго положенія точки f и плоскостей $\mathfrak{a}\mathfrak{b}f$ и $\mathfrak{c}\mathfrak{b}e$, а этими послѣдними въ свою очередь направленіе линіи ε' и направленія вращенія вокругъ ε и ε'. Всѣ эти направленія мы будемъ считать соотвѣтствующими. Поясним нѣсколько подробнѣе эти условія на частныхъ случаяхъ, которые намъ могутъ представиться.

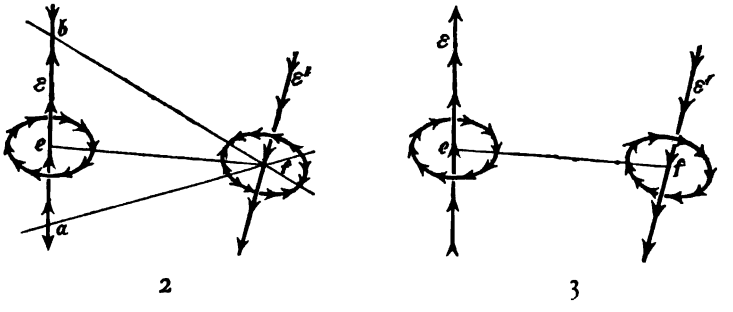
1. Если обѣ взаимныя поляры пересѣкаютъ абсолютъ въ дѣйствительныхъ точкахъ $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}$, то прямолинейныя образующія $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ и плоскости касательныя къ абсолюту и проведенныя черезъ ε и ε' всѣ будутъ дѣйствительны. Этотъ случай можетъ представиться только тогда, когда абсолютъ есть поверхность съ дѣйствительными прямолинейными образующими. Мы можемъ линію ef выбрать такъ, чтобы она пересѣкала абсолютъ въ дѣйствительныхъ точкахъ. На чертежѣ 11_1 указаны соотвѣтствующія направленія въ предположеніи, что точка $\mathfrak{a}$ принята за начальную для линіи ε. Направленія линій ε и ε' и направленія вращенія вокругъ нихъ не на всѣхъ участкахъ одинаковы.

2. Если одна изъ двухъ взаимныхъ поляръ, напримѣръ ε, пересѣкаетъ абсолютъ въ дѣйствительныхъ точкахъ, а другая, ε', — въ мнимыхъ, то прямолинейныя образующія $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ и плоскости проведенныя черезъ ε и касательныя къ абсолюту мнимы, а плоскости проведенныя черезъ ε' и касательныя къ абсолюту дѣйствительны. Этотъ случай всегда имѣетъ мѣсто въ пространствѣ Лобачевскаго и только въ немъ. Линію ef всегда можно выбрать такъ, чтобы она пере-

сѣкала абсолютъ въ дѣйствительныхъ точкахъ. На чертежѣ 11_2 указаны соотвѣтствующія направленія въ предположеніи, что точка a служитъ начальной для линіи ε. Направленія линіи ε' и вращенія вокругъ ε вездѣ одинаковы, но не на всѣхъ участкахъ одинаковы направленія линіи ε и вращенія вокругъ ε'.

3. Если обѣ взаимныя поляры ε и ε' пересѣкаютъ абсолютъ въ мнимыхъ точкахъ, то прямолинейныя образующія ac, ad, bc, bd и плоскости проведенныя черезъ ε и ε' и касательныя къ абсолюту всѣ мнимы. Этотъ случай всегда имѣетъ мѣсто, если абсолютъ мнимая поверхность (пространство эллиптическое) и можетъ представиться также и тогда, когда абсолютъ будетъ поверхностью дѣйствительной съ дѣйствительными производящими. Гдѣ бы мы ни взяли на ε и ε' точки e и f линія ef будетъ пересѣкать абсолютъ въ мнимыхъ точкахъ въ первомъ случаѣ и въ дѣйствительныхъ—во второмъ. На чертежѣ 11_3 указаны соотвѣтствующія направленія; на всѣхъ участкахъ они одинаковы.

Чертежъ 11.



2 3

Совокупность направленія прямой и соотвѣтствующаго направленія вращенія вокругъ нея мы будемъ называть винтовымъ направленіемъ прямой. Очевидно, что всякой прямой можно приписать два противоположныхъ винтовыхъ направленія и что каждому винтовому направленію прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное винтовое направленіе ея поляры.

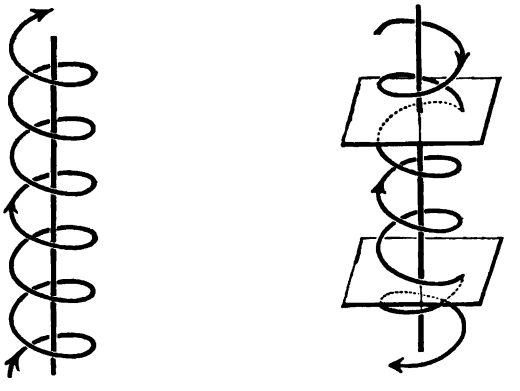
Когда разсматриваемая прямая и коэффиціенты функціи $f(xx)$ (§ 22) дѣйствительны, то винтовое направленіе прямой мы можемъ характеризовать стрѣлками поставленными вдоль винтообразной линіи, вьющейся вокругъ прямой, подобно тому, какъ направленіе прямой мы характеризуемъ прямолинейными стрѣлками, лежащими на самой прямой, или рядомъ съ ней, а направленіе вращенія вокругъ прямой—стрѣлками изъ

небольшихъ дужекъ кругообразной линіи, обнимающей прямую. Намъ можетъ представиться четыре случая.

1. Точки пересѣченія прямой и плоскости проведенныя черезъ нее и касающіяся абсолюта мнимы (напр. линія ε на чертежѣ 11_3). Въ этомъ случаѣ винтовое направленіе будетъ характеризоваться одной линіей представленной на чертежѣ 12_1.

2. Точки пересѣченія прямой съ абсолютомъ дѣйствительны, а плоскости, проведенныя черезъ прямую и касательныя къ абсолюту, мнимы (напр. линія ε на чертежѣ 11_2). Линія, характеризующая винтовое направленіе, представлена на чертежѣ 12_2; здѣсь изображены также дѣйствительныя плоскости касательныя къ абсолюту и проведенныя черезъ точки пересѣченія прямой съ абсолютомъ.

Чертежъ 12.



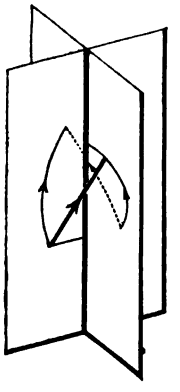
1 2

3. Точки пересѣченія прямой съ абсолютомъ мнимы, а плоскости, проведенныя черезъ нее и касательныя къ абсолюту дѣйствительны (напр. линія ε' на чертежѣ 11_2). Винтообразныя стрѣлки, характеризующія винтовое направленіе прямой, представлены на чертежѣ 12_3; плоскости, изображенныя на чертежѣ, проходятъ черезъ прямую и касаются абсолюта.

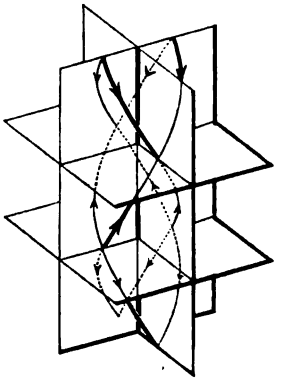
4. Точки пересѣченія прямой съ абсолютомъ и плоскости, проведенныя черезъ прямую и касательныя къ абсолюту, дѣйствительны (напр. линія ε на чертежѣ 11_1). Винтообразныя стрѣлки, характеризующія направленіе прямой, представлены

на чертежѣ 12_4; плоскости, изображенныя на чертежѣ, касаются абсолюта *.

Чертежъ 12.



3



4

Разсматривая эти чертежи, мы замѣчаемъ, что линія, которая характеризуетъ винтовое направленіе прямой, встрѣчая плоскости, касательныя къ абсолюту и проведенныя черезъ прямую или точки пересѣченія ея съ абсолютомъ, и переходя съ одной стороны какой либо изъ этихъ плоскостей на другую, измѣняетъ свой видъ и направленіе всякій разъ такимъ образомъ, что часть ея и стрѣлки, указывающія направленіе и лежащія по одну сторону плоскости, представляютъ какъ бы зеркальное отраженіе въ этой плоскости части и стрѣлокъ, лежащихъ по другую сторону.

52. **Тензоръ мотора.** — Предположимъ, что моторъ γ имѣетъ ось ε, и пусть α—векторъ и $\mathfrak{Я}$—роторъ мотора γ для точки приведенія, находящейся на оси. Приписавъ оси ε какое нибудь винтовое направленіе, мы будемъ называть его положительнымъ винтовымъ направленіемъ мотора γ; замѣчая, что линія ε, по самому опредѣленію оси (§ 41), служитъ лучомъ для вектора α и осью для ротора $\mathfrak{Я}$, примемъ направленія, совокупность которыхъ составляетъ винтовое направленіе оси ε, за положительныя для вектора α и ротора $\mathfrak{Я}$. Если въ этомъ предположеніи R есть тензоръ ротора $\mathfrak{Я}$, G—тензоръ вектора α, то комплексное число

$$R+\omega G,$$

* На чертежахъ 12_3 и 12_4 видимыя части винтообразной линіи проведены толстой чертой, части, закрытыя одной плоскостью,—тонкой, части, закрытыя двумя плоскостями,—пунктиромъ.

принадлежащее къ системѣ комплексныхъ чиселъ съ характеристическимъ равенствомъ

$$\omega^2=\varkappa^2,$$

гдѣ $\varkappa^2$ кривизна разсматриваемаго пространства, мы будемъ называть тензоромъ мотора γ, соотвѣтствующимъ оси ε и выбранному винтовому направленію этой оси. Его мы будемъ означать такимъ образомъ: T_γ, или $T(\gamma)$.

Мы знаемъ, что линія ε' полярная съ ε служитъ также осью мотора γ. Когда точку приведенія возьмемъ на линіи ε', то элементами мотора γ будутъ служить векторъ β и роторъ $\mathfrak{G}$ полярные съ $\mathfrak{A}$ и α; поэтому, если линіи ε' мы припишемъ винтовое направленіе соотвѣтствующее ε и примемъ направленія, изъ совокупности которыхъ оно состоитъ, за положительныя для вектора β и ротора $\mathfrak{G}$, то по теоремѣ § 48 тензоры вектора β и ротора $\mathfrak{G}$ будутъ равняться

$$R/\varkappa \text{ и } \varkappa G,$$

а тензоръ мотора γ, соотвѣтствующій направленію ε', будетъ

$$\varkappa G+\omega R/\varkappa=\frac{\omega}{\varkappa}(R+\omega G).$$

Если мы измѣнимъ направленіе оси ε на противоположное, то тензоры векторовъ α и $\mathfrak{A}$ измѣнятъ свой знакъ, измѣнитъ свой знакъ и тензоръ мотора γ; новому направленію оси ε будетъ отвѣчать слѣдовательно тензоръ

$$-(R+\omega G),$$

а соотвѣтствующему направленію ε'—

$$-\frac{\omega}{\varkappa}(R+\omega G).$$

Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема. — *Каждой оси отвѣчаетъ два тензора по одному для каждаго направленія оси, различающіеся одинъ отъ другого знакомъ. Умноживъ тензоръ, отвѣчающій нѣкоторому направленію одной изъ осей, на $\omega/\varkappa=\xi-\eta$, получимъ тензоръ, отвѣчающій соотвѣтствующему направленію ея поляры.*

Модуль и аргументъ тензора мотора мы будемъ называть модулемъ и аргументомъ мотора. Такимъ образомъ модуль M и аргументъ A мотора γ для того винтового направленія ε, которому соотвѣтствуетъ тензоръ $R+\omega G$ опредѣляются формулами

$$M=\sqrt{R^2-\varkappa^2 G^2}\,,\quad A=\frac{1}{2\varkappa}\log\frac{R+\varkappa G}{R-\varkappa G}\,.$$

Замѣчая, что для чиселъ $-1, \omega/\varkappa, -\omega/\varkappa$ модули равняются соотвѣтственно $1, i, i$, а аргументы $\pi i/\varkappa$, $3\pi i/2\varkappa$, $\pi i/2\varkappa$, и припоминая, что модуль произведенія равняется произведенію модулей, а аргументъ произведенія суммѣ аргументовъ, изъ доказанной теоремы легко выводимъ слѣдующія свойства модуля и аргумента мотора: модули мотора, соотвѣтствующіе противоположнымъ направленіямъ одной и той же оси, равны между собой, а аргументы различаются на $\pi i/\varkappa$; модули мотора, отвѣчающіе соотвѣтствующимъ направленіямъ полярныхъ осей, различаются множителемъ i, а аргументы—слагаемымъ $3\pi i/2\varkappa$.

Параметромъ мотора называется отношеніе коэффиціента при ω къ вещественной части тензора. Такимъ образомъ параметръ мотора γ для того направленія оси ε, которому отвѣчаетъ тензоръ $R+\omega G$, равняется G/R. Изъ доказанной теоремы легко вывести, что каждой оси отвѣчаетъ только одинъ параметръ и что произведеніе параметра для одной оси на кривизну пространства равняется обратной величинѣ параметра для другой оси. Параметръ и аргументъ, отвѣчающіе одной и той же оси, какъ видно изъ формулы для аргумента, связаны между собой соотношеніемъ

$$\frac{G}{R}=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tngh}\varkappa A.$$

Въ Эвклидовомъ пространствѣ, когда $\varkappa=0$, параметръ равняется аргументу.

Наше опредѣленіе тензора относится конечно только къ мотору, который имѣетъ ось, и не примѣнимо въ пространствѣ безконечно большой кривизны, ибо характеристическое равенство для такого пространства обращается въ $\omega^2=\infty$. Но мы уже обращали вниманіе, что нѣтъ надобности отдѣльно изучать пространство безконечно большой кривизны, потому что всѣ свойства его связаны принципомъ двойственности со свойствами пространства, кривизна котораго равняется нулю, и весьма легко выводятся изъ этихъ послѣднихъ. Если бы, однако, мы захотѣли самостоятельно изслѣдовать простран-

ство безконечно большой кривизны, то мы могли бы измѣнить опредѣленіе тензора такимъ образомъ, что оно будетъ примѣнимо и къ этому пространству, мы должны были бы назвать тензоромъ мотора γ не число $R+\omega G$, а число

$$G+\omega' R,$$

принадлежащее къ системѣ комплексныхъ чиселъ съ характеристическимъ равенствомъ

$$\omega'^2=1/\varkappa^2,$$

которое для пространства безконечно большой кривизны обращается въ $\omega'^2=0$. Это опредѣленіе въ свою очередь было бы непримѣнимо къ пространству съ кривизной равной нулю.

Опредѣливъ понятіе тензора, перейдемъ теперь къ выясненію понятія о комплексномъ углѣ.

53. **Углы и разстоянія между прямыми линіями.** — Возьмемъ двѣ прямыя α и β какъ угодно расположенныя въ пространствѣ и построимъ ихъ поляры α' и β'. Линія, пересѣкающая α и α', будетъ перпендикулярна къ той и другой (§ 23), линія, пересѣкающая β и β', будетъ перпендикулярна къ каждой изъ нихъ. Поэтому линія, пересѣкающая всѣ четыре линіи $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$, будетъ одновременно перпендикулярна къ α и β, и такъ какъ можно построить двѣ линіи, пересѣкающія четыре данныхъ, то для двухъ линій α и β мы имѣемъ два общихъ перпендикуляра. Эти общіе перпендикуляры мы будемъ называть также линіями кратчайшихъ разстояній между α и β. Очевидно, что они будутъ взаимными полярами, ибо если двѣ прямыя пересѣкаются, то и поляры ихъ пересѣкаются, и поляра прямой, встрѣчающей линіи $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$, должна пересѣчь линіи $\alpha',\beta',\alpha,\beta$, т. е. тѣ же четыре линіи, какъ и первая.

Пусть ε и ε' линіи кратчайшихъ разстояній между α и β и пусть линіи α и β пересѣкаются съ ε въ точкахъ a и b, а съ ε'—въ точкахъ d и e (см. чертежъ 13). Припишемъ линіи ε и вращенію вокругъ нея соотвѣтствующія (§ 51) направленія. Принявъ ихъ за положительныя направленія для вектора ab, началомъ которому служитъ пересѣченіе α съ ε, а концомъ—пересѣченіе β съ ε, и для ротора $dabe$, началомъ которому служитъ плоскость dab, проходящая черезъ α и ε, а концомъ—плоскость abe, проходящая черезъ β и ε, мы будемъ называть длину δ вектора ab разстояніемъ, а уголъ θ

ротора *dabe*—угломъ между α и β, соотвѣтствующими перпендикуляру ε и выбранному винтовому направленію его. Если бы это послѣднее мы измѣнили бы на противоположное, то для разстоянія и угла между α и β мы получили бы значенія

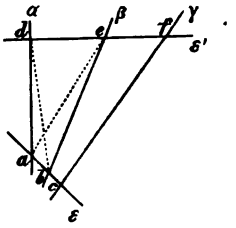
$$-\delta \text{ и} -\theta,$$

различающіяся отъ значеній, соотвѣтствующихъ первоначальному направленію ε, только знакомъ: это слѣдуетъ изъ того, что длина вектора и уголъ ротора мѣняютъ свой знакъ съ перемѣной ихъ положительнаго направленія на противоположное. Второму перпендикуляру ε' также будутъ соотвѣтствовать два угла и два разстоянія: разстоянія равняются длинѣ вектора *de*, а углы—углу ротора *adeb*. Такъ какъ векторы *ab* и *de* полярны съ роторами *adeb* и *dabe*, то, припоминая сказанное въ § 48, увидимъ, что разстоянія и углы между α и β, соотвѣтствующіе перпендикуляру ε', равняются

$$\pm\theta/\varkappa, \quad \pm\delta\varkappa,$$

причемъ должны быть взяты верхніе знаки, если линіи ε' припишемъ винтовое направленіе соотвѣтствующее первоначальному направленію ε, и нижніе въ противномъ случаѣ.

Чертежъ 13.



Итакъ между двумя прямыми линіями четыре угла и четыре разстоянія; каждому общему перпендикуляру соотвѣтствуетъ два угла и два разстоянія, различающіеся между собой только знакомъ.

Обратимъ вниманіе на слѣдующія свойства угловъ и разстояній между двумя прямыми.

1. Такъ какъ длина вектора и уголъ ротора могутъ имѣть безсчисленное множество значеній, различающихся на величины π/k_1 и π/k_2, то разстоянія и углы между двумя прямыми опредѣляются до величинъ кратныхъ отъ π/k_1 и π/k_2 соотвѣтственно.

2. Углы и разстоянія между двумя прямыми зависятъ отъ послѣдовательности, въ которой мы беремъ прямыя: такъ какъ длина вектора и уголъ ротора измѣняютъ свой знакъ съ перемѣной направленія вектора и ротора, то разстоянія и углы между α и β отличаются отъ соотвѣтствующихъ разстояній и угловъ между β и α знаками.

3. Если линія γ пересѣкаетъ линіи ε и ε' въ точкахъ c и f, то три линіи α,β,γ будутъ имѣть два общихъ перпендикуляра. Означая на время черезъ $[ab]$, $[bc]$, $[ac]$ длины векторовъ ab, bc, ac черезъ, $[dabe]$, $[ebcf]$, $[dacf]$ углы роторовъ $dabe$, $ebcf$, $dacf$ по доказанному въ §§ 46_2 и 47_2, имѣемъ

$$[ab]+[bc]=[ac]$$
$$[dabe]+[ebcf]=[dacf].$$

Такимъ образомъ, если три прямыя линіи имѣютъ общій перпендикуляръ, то углы и разстоянія между ними, соотвѣтствующіе одному и тому же перпендикуляру, обладаютъ свойствомъ сложимости.

4. Если линіи α и β пересѣкаются и точки d и e сливаются, то линія ε' проходитъ черезъ точку пересѣченія линій α и β и перпендикулярна къ ихъ плоскости, а линія ε лежитъ въ этой плоскости и служитъ полярой точки встрѣчи α и β относительно кривой S второго порядка, по которой плоскость линій α и β пересѣкается съ абсолютомъ. Разстояніе, соотвѣтствующее перпендикуляру ε' и уголъ, соотвѣтствующій перпендикуляру ε, равняются нулю, и, говоря о разстояніи и углѣ между α и β, мы подразумѣваемъ всегда разстояніе и уголъ отличные отъ нуля. Означая по прежнему черезъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ точки пересѣченія ε съ абсолютомъ и замѣчая, что пучекъ плоскостей $\varepsilon'\mathfrak{a}$, $\varepsilon' a$, $\varepsilon' b$, $\varepsilon'\mathfrak{b}$ перспективенъ съ пучкомъ лучей $e\mathfrak{a}$, ea, eb, $e\mathfrak{b}$, мы имѣемъ

$$\varepsilon'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)=e(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)$$

и уголъ между прямыми α и β

$$\frac{1}{2ik_2}\log\varepsilon'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)$$

мы можемъ представить въ видѣ

$$\frac{1}{2ik_2}\log e(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)=\frac{1}{2ik_2}\log(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab).$$

Такъ какъ линіи $e\mathfrak{a}$ и $e\mathfrak{b}$ очевидно касаются кривой S, то мы

видимъ, что уголъ между прямыми, лежащими въ одной плоскости, можно выразить черезъ ангармоническое отношеніе этихъ двухъ линій и линій, проведенныхъ черезъ точку ихъ пересѣченія и касательныхъ къ кривой, по которой плоскость прямыхъ пересѣкается съ абсолютомъ.

5. Линіи ε и ε' служатъ общими перпендикулярами не только для линій α и β, но и для линій ae и bd. Углы dae и dbe между линіями da и ae, db и be измѣряются поэтому однимъ и тѣмъ же угломъ θ между плоскостями dab и eab и стало быть равны между собой. Замѣчая, что линіи da и ea, db и eb мы можемъ разсматривать какъ линіи пересѣченія плоскостей dab и eab съ плоскостями ade и bde перпендикулярными къ нимъ и къ линіи ε, мы видимъ такимъ образомъ, что уголъ (и разстояніе) между двумя прямыми по которымъ двѣ плоскости пересѣкаются третьей къ нимъ перпендикулярной не зависитъ отъ положенія этой послѣдней. Точки d и e, находясь на полярѣ линіи ε, будутъ перпендикулярны къ точкамъ a и b этой линіи. Такъ какъ углы dae и dbe равны, то мы можемъ сказать, что уголъ (и разстояніе) между двумя прямыми, соединяющими двѣ данныя точки съ третьей къ нимъ перпендикулярной не зависитъ отъ положенія этой послѣдней.

Мы видѣли, что углы и разстоянія между двумя прямыми могутъ имѣть безчисленное множество значеній, различающихся на величины π/k_2 и π/k_1 соотвѣтственно. Мы покажемъ теперь, что въ тѣхъ случаяхъ, когда разсматриваемымъ прямымъ или вращеніямъ вокругъ нихъ мы приписываемъ направленія, возможно ввести такія условія, которыя позволяютъ углы и разстоянія между двумя прямыми сдѣлать болѣе опредѣленными.

54. **Углы и разстоянія между направленіями.**—Пусть мы имѣемъ три вектора ox, oy, oz, лежащіе въ одной плоскости. Означивъ цифрами 1,2,3,4 вершины координатнаго тетраэдра, мы примемъ плоскость, въ которой лежатъ векторы ox, oy, oz за плоскость 123, точку o, общее начало векторовъ,—за вершину 3 и возьмемъ точки 1 и 2 на полярѣ точки 3 относительно кривой S второго порядка, по которой плоскость 123 пересѣкается съ абсолютомъ. Въ силу этого послѣдняго условія плоскость O:

$$O_1=a_{13}\ ,\ O_2=a_{23}\ ,\ O_3=a_{33}\ ,\ O_4=a_{43}$$

полярная съ точкой $o(0,0,1,0)$ должна пройти черезъ точки 1,2, и слѣдовательно при нашемъ выборѣ координатнаго те-

траэдра коэффиціенты a_{13} и a_{23} ур. абсолюта должны быть равны нулю. Поэтому, замѣчая, что координата x_4 точки x равняется нулю, мы имѣемъ

$$f(xx)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2,$$
$$f(oo)=a_{33}\quad,\quad f(ox)=a_{33}x_3$$

и затѣмъ по (10)

$$k_1\mathrm{T}_{ox}=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{33}}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2+2\frac{a_{12}}{a_{33}}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\frac{a_{22}}{a_{33}}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2}.$$

Разложивъ квадратичную функцію, стоящую подъ знакомъ корня, на два линейныхъ множителя

$$\frac{a_{11}}{a_{33}}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2+2\frac{a_{12}}{a_{33}}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\frac{a_{22}}{a_{33}}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2=$$
$$=\left(u_1\frac{x_1}{x_3}+u_2\frac{x_2}{x_3}\right)\left(v_1\frac{x_1}{x_3}+v_2\frac{x_2}{x_3}\right)\qquad(30)$$

и положивъ для краткости

$$u_1\frac{x_1}{x_3}+u_2\frac{x_2}{x_3}=u_x\,,\quad v_1\frac{x_1}{x_3}+v_2\frac{x_2}{x_3}=v_x\,,$$

мы можемъ представить T_{ox} въ видѣ

$$k_1\mathrm{T}_{ox}=\sqrt{u_xv_x}.\qquad(31)$$

Условіемъ (30) величины u_1,v_1,u_2,v_2 опредѣляются еще не вполнѣ, и мы всегда можетъ сдѣлать $u_1=v_1$.

Опредѣлимъ, далѣе, уголъ между прямыми $o1$ и лучомъ вектора ox. Общими перпендикулярами къ этимъ линіямъ служатъ линія проведенная черезъ o и перпендикулярная къ плоскости 123 и линія 12, лежащая въ этой плоскости и полярная съ первой. Выбравъ направленіе одного изъ этихъ перпендикуляровъ, припишемъ соотвѣтствующее направленіе другому. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ суть точки пересѣченія линіи 12 съ кривой S, $\mathfrak{a}$—начальная, $\mathfrak{b}$—конечная, то линіи $o\mathfrak{a}$ и $o\mathfrak{b}$ будутъ касательными проведенными изъ o къ S, и, означая буквой a пересѣченіе ox съ 12, мы будемъ имѣть для опредѣленія угла u между $o1$ и ox формулу

$$u=\frac{1}{2ik_2}\log\,o(\mathfrak{ab}1a)=-\frac{1}{2ik_2}\log(\mathfrak{ab}1a)\,.\qquad(32)$$

Замѣчая, что ур. коническаго сѣченія S таково:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0,$$

мы легко вычислимъ координаты точекъ a и b и построимъ слѣдующую таблицу координатъ

a	v_2,—v_1, 0, 0;	1	1, 0, 0, 0;
b	u_2,—u_1 0, 0;	a	x_1, x_2, 0, 0.

Затѣмъ, принявъ во вниманіе равенство $u_1=v_1$, найдемъ

$$(ab1a)=u_x/v_x$$

и

$$u=\frac{1}{2ik_2}\log u_x/v_x. \qquad (33)$$

Рѣшая ур. (31) и (33) относительно u_x и v_x, получимъ

$$u_x=\pm k_1 T_{ox}e^{ik_2u}\ ,\quad v_x=\pm k_1 T_{ox}e^{-ik_2u}, \qquad (34)$$

причемъ въ обѣихъ формулахъ должны быть взяты или верхніе, или нижніе знаки. Мы знаемъ, что по формулѣ (33) u опредѣляется только до величинъ кратныхъ отъ π/k_2. Такъ какъ вторыя части послѣднихъ равенствъ мѣняютъ свой знакъ съ измѣненіемъ u на величину π/k_2, то всѣ значенія u мы можемъ распредѣлить въ два ряда такимъ образомъ, что для значеній, принадлежащихъ къ одному и тому же ряду въ формулахъ (34) мы будемъ имѣть верхніе знаки, а для значеній другого ряда—нижніе. Очевидно, что члены одного и того же ряда будутъ различаться на величины

$$2n\pi/k_2,$$

гдѣ n цѣлое число, и будутъ отличаться отъ членовъ другого ряда на величины

$$(2n+1)n/k_2.$$

Вторыя части равенствъ (34) мѣняютъ свой знакъ также одновременно съ T_{ox}, т. е. съ перемѣной положительнаго направленія вектора ox на противоположное. Поэтому, если мы условимся выбирать для u только такія значенія, которыя удовлетворяютъ ур.

$$u_x=k_1 T_{ox}e^{ik_2u}\ ,\quad v_x=k_1 T_{ox}e^{-ik_2u}, \qquad (35)$$

то u опредѣлится до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_2$ и будетъ измѣняться на величину π/k_2 съ перемѣной направленія луча ox на противоположное.

Означая черезъ b точку пересѣченія луча oy съ линіей 12, мы имѣемъ для угла v между $o1$ и oy

$$v=\frac{1}{2ik_2}\log(a\mathfrak{b}1b). \tag{36}$$

Если мы будемъ выбирать для v только тѣ значенія, которыя удовлетворяютъ ур.

$$u_y=k_1 T_{oy} e^{ik_2 v}\ ,\quad v_y=k_1 T_{oy} e^{-ik_2 v} \tag{37}$$

гдѣ $$u_y=u_1\frac{y_1}{y_3}+u_2\frac{y_2}{y_3}\ ,\quad v_y=v_1\frac{y_1}{y_3}+v_2\frac{y_2}{y_3}\ ,$$

подобнымъ (35), то уголъ v будетъ обладать такими же свойствами какъ и уголъ u.

Зная углы u и v, мы можемъ вычислить и уголъ (xoy) между лучами ox и oy. Общими перпендикулярами къ лучамъ ox и oy служатъ линія перпендикулярная къ плоскости этихъ лучей и линія 12, т. е. тѣ же двѣ линіи, которыя служатъ общими перпендикулярами и для паръ линій ox и $o1$, oy и $o1$. Поэтому уголъ (xoy) будетъ опредѣляться формулой

$$(xoy)=\frac{1}{2ik_2}\log o(a\mathfrak{b}ab)=\frac{1}{2ik_2}\log(a\mathfrak{b}ab) \tag{38}$$

и въ силу извѣстнаго соотношенія

$$(a\mathfrak{b}1a)(a\mathfrak{b}ab)=(a\mathfrak{b}1b),$$

будетъ связанъ съ углами u и v уравненіемъ

$$u+(xoy)=v,$$

изъ котораго $$(xoy)=v-u. \tag{39}$$

Разсматривая уголъ (xoy) вычисленной по этой послѣдней формулѣ въ предположеніи, что u и v опредѣлены по ур. (37) и (35), мы увидимъ, что кромѣ свойствъ общихъ всѣмъ угламъ между двумя прямыми линіями измѣнять свой знакъ съ перемѣной послѣдовательности самыхъ прямыхъ и направленій общихъ къ нимъ перпендикуляровъ онъ имѣетъ еще и слѣдующія. Во-первыхъ, такъ какъ углы u и v опре-

дѣляются до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_2$, то до тѣхъ же величинъ опредѣлится и уголъ (xoy). Во-вторыхъ, если мы измѣнимъ направленіе луча ox на противоположное, то уголъ u измѣнится на π/k_2, что повлечетъ за собой и измѣненіе угла (xoy) на ту же величину; также вліяетъ на уголъ (xoy) и направленіе луча oy. Такимъ образомъ (xoy) формулами (35), (37) и (39) опредѣляется до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_2$ и зависитъ не только отъ относительнаго положенія линій ox и oy, но и отъ направленій, приписываемыхъ этимъ линіямъ, и мы, желая подчеркнуть это послѣднее обстоятельство, будемъ называть его угломъ между *направленіями* лучей ox и oy.

Обратимъ вниманіе еще на слѣдующія весьма важныя свойства угла между направленіями лучей, лежащихъ въ одной плоскости.

1. Уголъ (xoy) между направленіями лучей ox и oy не зависитъ отъ положенія вспомогательной линіи $o1$, проведенной въ ихъ плоскости, ибо съ одной стороны, какъ видно изъ формулы (38), ни одно изъ возможныхъ для него значеній не зависятъ отъ положенія этой линіи, а съ другой, какъ видно изъ (32), (36) и (39), съ измѣненіемъ положенія линіи $o1$ онъ можетъ измѣняться только непрерывно.

2. Означивъ черезъ w уголъ между $o1$ и лучомъ oz, опредѣлимъ его изъ равенствъ

$$u_z=k_1 T_{oz} e^{ik_2 w}, \quad v_z=k_1 T_{oz} e^{-ik_2 w}, \tag{40}$$

гдѣ $$u_z=u_1\frac{z_1}{z_3}+u_2\frac{z_2}{z_3}; \quad v_z=v_1\frac{z_1}{z_3}+v_2\frac{z_2}{z_3}.$$

Зная уголъ w, изъ соотношеній

$$u+(xoz)=w, \quad v+(yoz)=w \tag{41}$$

мы можемъ найти углы (xoz) и (yoz) между направленіями лучей ox и oz, oy и oz. Сопоставивъ эти равенства съ (39), выводимъ

$$(xoy)+(yoz)=(xoz), \tag{42}$$

и видимъ такимъ образомъ, что углы между направленіями лучей, лежащихъ въ одной плоскости, обладаютъ свойствомъ сложимости.

3. Предположимъ, что лучи ox и oy совпадаютъ и что $ox=oy$. Если лучи ox и oy имѣютъ одинаковое направленіе,

то $T_{ox}=T_{oy}$, и изъ формулъ (35), (37) и (39) мы имѣемъ

$$u=v,\ (xoy)=v-u=0.$$

Если же направленія лучей ox и oy противоположны, то $T_{ox}=-T_{oy}$, и тѣ же формулы даютъ намъ

$$v=u+\pi/k_2,\ (xoy)=v-u=\pi/k_2.$$

Такимъ образомъ уголъ между направленіями двухъ совпадающихъ лучей равняется нулю, когда направленія ихъ одинаковы, и π/k_2, когда они противоположны.

Показавъ возможность опредѣлять уголъ между направленіями лучей, лежащихъ въ одной плоскости, до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_2$ и обнаруживъ нѣкоторыя его свойства, мы выведемъ ниже (см. § 60) правило, которое позволяетъ опредѣлять этотъ уголъ безъ помощи ур. (35), (37) и (39), а теперь обратимся къ изслѣдованію общаго случая, когда разсматриваемыя прямыя не пересѣкаются.

Пусть α и β двѣ прямыя какъ угодно расположенныя въ пространствѣ. Приписавъ общимъ къ нимъ перпендикулярамъ ε и ε' соотвѣтствующія направленія, назовемъ уголъ и разстояніе между α и β, отвѣчающіе перпендикуляру ε, черезъ θ и δ, уголъ и разстояніе между α и β, отвѣчающіе перпендикуляру ε', черезъ θ' и δ'. Мы знаемъ, что углы θ и θ', равные угламъ роторовъ $dabe$ и $adeb$ (см. чертежъ 13), опредѣляются до величинъ кратныхъ отъ π/k_2, а разстоянія δ и δ', равные длинамъ векторовъ ab и de,—до величинъ кратныхъ отъ π/k_1, а потому въ силу соотношеній (см. § 48)

$$k_1\delta=k_2\theta',\quad k_1\delta'=k_2\theta \tag{43}$$

имѣемъ
$$\theta=\theta_0+m\pi/k_2\ ,\quad \theta'=\theta_0'+n\pi/k_2,$$
$$\delta=\delta_0+n\pi/k_1\ ,\quad \delta'=\delta_0'+m\pi/k_1,$$

гдѣ $\theta_0,\delta_0,\theta_0',\delta_0'$ представляетъ собой какія нибудь изъ значеній $\theta,\delta,\theta',\delta'$, связанныхъ соотношеніями

$$k_1\delta_0=k_2\theta_0'\ ,\quad k_1\delta_0'=k_1\theta_0$$

подобными (43), а n и m какія нибудь цѣлыя числа.

Припишемъ теперь линіямъ α и β опредѣленныя направленія. Припишемъ также какое нибудь направленіе линіи ae и замѣчая, что

$$\theta=\angle dae,\quad \theta'=\angle aeb,$$

опредѣлимъ числа n и m въ выраженіяхъ θ и θ' такимъ образомъ, чтобы углы θ и θ' были углами между направленіями лучей α и ae, ae и β соотвѣтственно. Опредѣливъ этими условіями углы θ и θ' до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_2$, а разстоянія δ и δ' до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/k_1$, разсмотримъ какими свойствами они будутъ обладать.

1. Если мы измѣнимъ направленіе ae на противоположное, то углы θ и θ' измѣнятся на π/k_2, а разстоянія δ и δ' на π/k_1. Такъ какъ линія ae служитъ вспомогательной при опредѣленіи угловъ и разстояній между α и β, и по даннымъ направленіямъ α и β мы не можемъ отличить одного направленія линіи ae отъ другого, то мы можемъ сказать, что углы и разстоянія между прямыми α и β, которымъ мы приписываемъ направленія, опредѣляются настолько, что мы можемъ *одновременно* измѣнить углы на величины π/k_2 и разстоянія на величины π/k_1.

2. Опредѣляя углы и разстоянія между α и β, мы пользовались вспомогательной линіей ae; но очевидно, что съ тою же цѣлью мы могли бы воспользоваться и линіей db, которая къ линіямъ α и β находится въ такомъ же отношеніи, въ какомъ и линія ae. Мы покажемъ ниже, что углы θ и θ', опредѣленные помощью линіи db, или ничѣмъ не отличаются отъ угловъ, опредѣленныхъ помощью линіи ae, или же оба отличаются отъ этихъ послѣднихъ на величины π/k_2. И потому, принимая во вниманіе только что сказанное о предѣлахъ, до которыхъ опредѣляются углы между прямыми α и β, мы видимъ, что замѣна линіи ae линіей db не вліяетъ на углы θ и θ' и разстоянія δ и δ' (см. § 61).

3. Измѣнимъ направленіе одной изъ линій α,β, напримѣръ β, на противоположное. Тогда уголъ θ' и разстояніе δ измѣнятся на π/k_2 и π/k_1 соотвѣтственно. Но мы видѣли, что $\theta,\theta',\delta,\delta'$ опредѣляются лишь настолько, что мы можемъ одновременно измѣнить углы на π/k_2, а разстоянія на π/k_1, а потому можно вернуть θ' и δ къ ихъ первоначальному значенію, которое они имѣли до перемѣны направленія линіи β, измѣнивъ θ и δ' такъ, что новыя ихъ значенія будутъ отличаться отъ старыхъ на π/k_2 и π/k_1 соотвѣтственно. Такимъ образомъ, когда измѣняется направленіе линіи β, уголъ, соотвѣтствующій одному изъ общихъ къ α и β перпендикуляровъ, и разстояніе, соотвѣтствующее другому, измѣняются на π/k_2 и π/k_1, а другой уголъ и другое разстояніе остаются безъ перемѣны. Таково же вліяніе и направленія α. Желая подчеркнуть зависимость угловъ θ и θ' и разстояній δ и δ' отъ направленій, приписываемыхъ линіямъ α и β, мы будемъ

называть ихъ углами и разстояніями между направленіями α и β.

4. Вслѣдствіе нашего условія приписывать перпендикулярамъ ε и ε' соотвѣтствующія направленія, съ перемѣной направленія одного будетъ измѣнять свое направленіе и другой. Но знакъ угла θ зависитъ отъ направленія ε, а знакъ θ' отъ направленія ε', а потому съ перемѣной направленія одного изъ перпендикуляровъ будутъ измѣняться знаки какъ угловъ θ,θ' такъ и разстояній δ,δ'.

5. Измѣнимъ, наконецъ, послѣдовательность лучей α и β. Уголъ между β и α, соотвѣтствующій перпендикуляру ε, равняется углу *ead* между лучами *ae* и α, а уголъ — соотвѣтствующій перпендикуляру ε' равняется углу *bea* между лучами β и *ae*. Но мы знаемъ, что углы *dae* и *aeb* отличаются отъ угловъ *ead* и *bea* только знаками, а потому углы и разстоянія между β и α будутъ отличаться отъ угловъ и разстояній между α и β также знаками.

6. Если линія γ пересѣкаетъ линіи ε и ε' въ точкахъ *c* и *f*, то линіи ε и ε' будутъ общими перпендикулярами къ тремъ линіямъ α,β,γ. Приписавъ линіи γ какое набудь направленіе, опредѣлимъ углы $(\alpha\beta)_\varepsilon$, $(\beta\gamma)_\varepsilon$, $(\alpha\gamma)_\varepsilon$ между направленіями α и β, β и γ, α и γ, соотвѣтствующіе перпендикуляру ε. Такъ какъ эти углы могутъ отличаться только на величины π/k_2 отъ угловъ между прямыми α и β, β и γ, α и γ, а эти послѣдніе обладаютъ свойствомъ сложимости, то мы будемъ имѣть одно изъ двухъ:

$$\text{или} \qquad (\alpha\beta)_\varepsilon+(\beta\gamma)_\varepsilon=(\alpha\gamma)_\varepsilon, \tag{44}$$

$$\text{или} \qquad (\alpha\beta)_\varepsilon+(\beta\gamma)_\varepsilon=(\alpha\gamma)_\varepsilon+\pi/k_2.$$

Если линію γ мы будемъ перемѣщать такъ, чтобы она пересѣкала постоянно линіи ε и ε', то углы $(\alpha\gamma)_\varepsilon$, $(\beta\gamma)_\varepsilon$ будетъ измѣняться непрерывно, а разность $(\alpha\beta)_\varepsilon+(\beta\gamma)_\varepsilon-(\alpha\gamma)_\varepsilon$, для которой возможны только два значенія будетъ оставаться постоянной. Но эта разность обращается въ нуль, когда линія γ совпадаетъ съ β, ибо тогда

$$\text{или} \qquad (\alpha\beta)_\varepsilon=(\alpha\beta)_\varepsilon \quad , \ (\beta\gamma)_\varepsilon=0,$$

$$\text{или} \qquad (\alpha\gamma)_\varepsilon=(\alpha\beta)_\varepsilon+\pi/k_2, \ (\beta\gamma)_\varepsilon=\pi/k_2;$$

слѣдовательно какоро бы ни было положеніе линіи γ всегда между углами $(\alpha\beta)_\varepsilon$, $(\beta\gamma)_\varepsilon$, $(\alpha\gamma)_\varepsilon$ мы имѣемъ соотношеніе (44). Такова же зависимость и между углами соотвѣтствующими перпендикуляру ε'. Итакъ углы, а въ силу (43) и разстоянія

между направленіями прямыхъ обладаютъ свойствомъ сложимости.

Резюмируя теперь все сказанное, мы приходимъ къ такому результату.

Углы и разстоянія между направленіями двухъ лучей α и β опредѣляются настолько, что мы можемъ только одновременно измѣнить углы на π/k_2, а разстоянія на π/k_1. Они зависятъ: 1, отъ послѣдовательности лучей α и β и направленія, приписываемаго одному изъ общихъ къ α и β перпендикуляровъ: съ перемѣной этого направленія и съ измѣненіемъ послѣдовательности лучей α и β они всѣ измѣняютъ свой знакъ, 2, отъ направленія самихъ лучей α и β: всякій разъ, когда мы измѣнимъ направленіе одного изъ лучей на противоположное, уголъ, отвѣчающій одному изъ перпендикуляровъ, и разстояніе, отвѣчающее другому, измѣняются на π/k_2 и π/k_1. Углы и растоянія между направленіями лучей обладаютъ свойствомъ сложимости.

Мы разсматривали до сихъ поръ прямую какъ лучъ, соединяющій двѣ точки и несущій точечный рядъ, послѣдовательностью точекъ котораго характеризуется направленіе луча. Но мы можемъ разсматривать прямую также какъ линію пересѣченія двухъ плоскостей, служащую осью пучка плоскостей, послѣдовательностью которыхъ характеризуется направленіе вращенія вокругъ прямой, и тогда, видоизмѣняя всѣ разсужденія этого параграфа согласно съ принципомъ двойственности, мы придемъ къ такому разультату.

Углы и разстоянія между осями α и β, вращеніямъ вокругъ которыхъ приписаны направленія, опредѣляются настолько, что мы можемъ только одновременно измѣнить углы на π/k_2, а разстоянія на π/k_1. Они зависятъ: 1, отъ послѣдовательности осей α и β и направленія, приписываемаго вращенію вокругъ одного изъ общихъ къ α и β перпендикуляровъ: съ перемѣной этого направленія на противоположное и съ измѣненіемъ послѣдовательности осей α и β они всѣ мѣняютъ свой знакъ, 2, отъ направленія вращенія вокругъ самихъ осей α и β: всякій разъ, когда мы измѣнимъ направленіе вращенія вокругъ одной изъ осей на противоположное, уголъ, соотвѣтствующій одному изъ перпендикуляровъ и разстояніе, соотвѣтствующее другому, измѣнятся на π/k_2 и π/k_1. Они обладаютъ свойствомъ сложимости.

Итакъ углы и разстоянія между двумя прямыми становятся болѣе опредѣленными, когда мы припишемъ этимъ линіямъ или вращеніямъ вокругъ нихъ нѣкоторыя направле-

нія. Намъ остается еще рѣшить вопросъ: будутъ ли вліять на значенія угловъ и разстояній между двумя прямыми выборъ той или другой изъ двухъ вышеуказанныхъ точекъ зрѣнія. Покажемъ, что углы и разстоянія будутъ одинаковы, если вращеніямъ вокругъ прямыхъ мы приписываемъ направленія соотвѣтствующія въ смыслѣ § 51 направленіямъ самихъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\theta_1, \theta_1', \delta_1, \delta_1'$ суть углы и разстоянія между осами α и β, вращенія вокругъ которыхъ соотвѣтствуютъ направленіямъ лучей α и β. Такъ какъ величины $\theta, \theta', \delta, \delta'$ и величины $\theta_1, \theta_1', \delta_1, \delta_1'$ равняются величинамъ $\theta_0, \theta_0', \delta_0, \delta_0'$ или отличаются отъ нихъ на π/k_2 и π/k_1, то и $\theta, \theta', \delta, \delta'$ или будутъ равны $\theta_1, \theta_1', \delta_1, \delta_1'$, или будутъ отличаться отъ нихъ на π/k_2 и π/k_1. Но съ перемѣщеніемъ линіи β углы θ и θ_1 измѣняются непрерывно, поэтому разность между ними должна оставаться постоянной, а такъ какъ $\theta = \theta_1 = 0$, когда линіи α и β совпадаютъ, то и всегда $\theta = \theta_1$. Также докажемъ, что $\theta' = \theta_1'$, $\delta = \delta_1$, $\delta' = \delta_1'$.

Разсмотримъ теперь значенія угловъ и разстояній между прямыми линіями въ нѣкоторыхъ случаяхъ, а именно когда онѣ параллельны.

55. **Параллельныя линіи.**—Двѣ прямыя линіи называются параллельными, если онѣ пересѣкаютъ одну и ту же пару прямолинейныхъ образующихъ абсолюта; эти послѣднія мы будемъ называть директрисами параллельныхъ. Мы можемъ различать два вида параллельныхъ: директрисы параллельныхъ принадлежатъ къ одной и той же системѣ прямолинейныхъ образующихъ обсолюта, директрисы параллельныхъ принадлежатъ къ различнымъ системамъ. Въ первомъ случаѣ параллельныя называются С-параллельными или параллельными Clifford'a, во второмъ—Л-параллельными или параллельными Лобачевскаго.

Разсмотримъ сначала свойства С-параллельныхъ. Мы будемъ называть двѣ параллельныя Clifford'a ξ-параллельными или лѣво-параллельными, если ихъ директрисы принадлежатъ къ системѣ η (§ 51), и—η-параллельными или право-параллельными, если директрисы ихъ принадлежатъ къ системѣ ξ.

1. Пусть нѣкоторая прямая α пересѣкаетъ абсолютъ въ точкахъ a_1 и a_2 и пусть $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ прямолинейныя образующія абсолюта, проходящія черезъ a_1 и a_2, первыя двѣ изъ системы ξ, а вторыя—изъ системы η. Прямыя ξ-параллельныя съ α пересѣкаютъ линіи η_1, η_2 и образуютъ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ съ директрисами η_1, η_2; также прямыя

η-параллельныя съ α образуютъ конгруэнцію съ директрисами ξ_1,ξ_2. Черезъ произвольно взятую точку y проходитъ одна прямая β, пересѣкающая η_1,η_2, и одна прямая γ, пересѣкающая ξ_1,ξ_2; слѣдовательно къ данной линіи α черезъ данную точку можно провести двѣ C-параллельныхъ, одну ξ-, а другую η-параллельную. Въ произвольно взятой плоскости есть одна линія, пересѣкающая ξ_1,ξ_2, и одна линія, пересѣкающая η_1,η_2; слѣдовательно къ данной линіи α въ данной плоскости можно провести также двѣ C-параллельныя, одну ξ-, а другую η-параллельную (см. чертежъ 14).

Если линія α касается абсолюта, то точка a_2 совпадаетъ съ a_1, а прямыя ξ_2,η_2 съ прямыми ξ_1,η_1. Линіи, пересѣкающія ξ_1,ξ_2 обращаются въ касательныя къ абсолюту въ точкахъ, расположенныхъ на прямой ξ_1, а линіи пересѣкающія η_1,η_2—въ прямыя касательныя къ абсолюту въ точкахъ прямой η_1. Такимъ образомъ, когда прямая α имѣетъ абсолютное направленіе (т. е. касается къ абсолюту), то линіи $\xi(\eta)$-параллельныя съ ней образуютъ конгруэнцію прямыхъ касательныхъ къ абсолюту въ точкахъ образующей, которая принадлежитъ къ системѣ $\eta(\xi)$ и проходитъ черезъ точку касанія α. Чтобы въ разсматриваемомъ случаѣ черезъ данную точку y провести линію $\xi(\eta)$-параллельную съ α, проводимъ сначала черезъ точку касанія α съ абсолютомъ образующую $\eta_1(\xi_1)$, принадлежащую къ системѣ $\eta(\xi)$, а потомъ—плоскость $y\eta_1(\xi_1)$ черезъ точку y и линію $\eta_1(\xi_2)$. Линія, которая соединяетъ точку касанія этой плоскости съ абсолютомъ и точку y и будетъ $\xi(\eta)$-параллельна съ α. Чтобы построить $\xi(\eta)$-параллельную съ α, лежащую въ данной плоскости Y, опредѣляемъ точку пересѣченія $\eta_1(\xi_1)$ съ Y и проводимъ черезъ нее плоскость касательную къ абсолюту; линія пересѣченія этой плоскости съ плоскостью Y и будетъ искомой.

2. Предположимъ, что xy, общій къ двумъ ξ-параллельнымъ линіямъ α и β перпендикуляръ, пересѣкаетъ абсолютъ въ точкахъ a и b. Проведемъ черезъ эти послѣднія образующія абсолюта $f_1f_2,d_1d_2,g_1g_2,e_1e_2$, изъ которыхъ первыя двѣ, пересѣкая η_1,η_2, принадлежатъ къ системѣ ξ, а вторыя двѣ, пересѣкая ξ_1,ξ_2, принадлежатъ къ системѣ η. Эти четыре образующія попарно лежатъ въ одной плоскости: f_1f_2 съ e_1e_2, g_1g_2 съ d_1d_2. Если мы построимъ поверхность K второго порядка, которая проходитъ черезъ три линіи η_1,η_2,xy, то $\alpha,\beta,f_1f_2,d_1d_2$, и линіи α',β' полярныя съ α,β всѣ будутъ принадлежать къ одной и той же системѣ производящихъ этой поверхности, ибо всѣ онѣ пересѣкаются съ η_1,η_2,xy. Производящія другой системы поверхности K всѣ пересѣкаютъ линіи $\alpha,\beta,\alpha',\beta' f_1f_2,d_1d_2$ и,

слѣдовательно, всѣ служатъ общими къ линіямъ α и β перпендикулярами и всѣ между собой η-параллельны. Разсматривая двѣ η-параллельныя линіи, мы пришли бы къ подобному же результату. Итакъ между двумя $\xi(\eta)$-параллельными существуетъ ∞^1 общихъ перпендикуляровъ, которые образуютъ поверхность второго порядка и всѣ между собой $\eta(\xi)$-параллельны.

Черезъ каждую точку одной изъ двухъ C-параллельныхъ линій проходитъ одинъ общій къ нимъ перпендикуляръ. Поэтому, если черезъ какую-нибудь точку одной изъ двухъ C-параллельныхъ линій проведемъ прямую къ ней перпендикулярную и пересѣкающую другую, то эта прямая будетъ перпендикулярна и ко второй.

3. Припишемъ линіи xy какое-нибудь винтовое направленіе. Если для этого направленія точка $\mathfrak{a}$ будетъ начальной точкой линіи xy, а $\mathfrak{b}$ конечной, то плоскость $f_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}e_1$ будетъ начальной, а $g_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}d_1$—конечной, ибо плоскости $f_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}e_1, g_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}d_1$ касаются абсолюта и первая содержитъ образующую f_1f_2, которая принадлежитъ къ системѣ ξ и проходитъ черезъ начальную точку $\mathfrak{a}$ (§ 51). Уголъ θ и разстояніе δ между α и β, соотвѣтствующіе перпендикуляру xy, опредѣляются по формуламъ

$$\theta=\frac{1}{2ik_2}\log\mathfrak{a}\mathfrak{b}(f_1d_1a_1b_1)=\frac{1}{2ik_2}\log(f_1d_1a_1b_1)$$

$$\delta= \qquad\qquad =\frac{1}{2ik_1}\log(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy)$$

Такъ какъ, по свойству поверхности K второго порядка,

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy)=(f_1d_1a_1b_1),$$

то послѣднюю формулу для δ можно представить въ видѣ

$$\delta=\frac{1}{2ik_1}\log(f_1d_1a_1b_1).$$

Ангармоническое отношеніе $(f_1d_1a_1b_1)$, помощью котораго выражаются уголъ и разстояніе между α и β, зависитъ только отъ относительнаго положенія самихъ линій α и β, но не зависитъ отъ положенія линіи кратчайшаго разстоянія xy, а потому изъ формулъ для θ и δ слѣдуетъ, что всѣмъ общимъ перпендикулярамъ къ α и β соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ же уголъ и одно и то же разстояніе. Сравнивая выраженія θ и δ,

мы видимъ, что они связаны соотношеніемъ

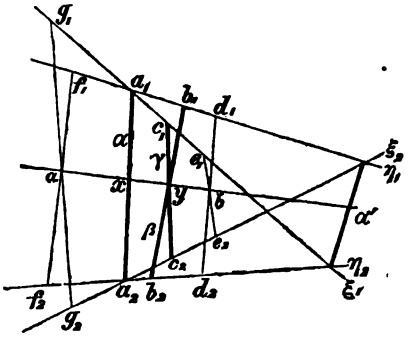
$$\varkappa\delta=\theta. \tag{45}$$

Изслѣдуемъ подобнымъ же образомъ углы и разстоянія между двумя γ_i-параллельными α и γ. Предполагая, что xy общій къ нимъ перпендикуляръ и для выбраннаго винтового направленія xy точка a служитъ начальной, b—конечной, уголъ и разстояніе между α и γ мы опредѣлимъ по формуламъ

$$\theta=\frac{1}{2ik_2}\log ab(e_1g_1a_1c_1)=\frac{1}{2ik_2}\log(e_1g_1a_1c_1),$$

$$\delta= \qquad\qquad =\frac{1}{2ik_1}\log(abxy),$$

Чертежъ 14.



изъ которыхъ вторая, если примемъ во вниманіе, что по свойству поверхности второго порядка, проведенной черезъ линіи xy,ξ_1,ξ_2,

$$(abxy)=(g_1e_1a_1c_1)$$

можетъ быть представлена въ видѣ

$$\delta=\frac{1}{2ik_1}\log(g_1e_1a_1c_1).$$

Эти формулы показываютъ, что всѣмъ общимъ къ α и γ перпендикулярамъ соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ же уголъ и одно и то же разстояніе, связанные между собой въ силу извѣстнаго равенства

$$(e_1g_1a_1c_1)=1/(g_1e_1a_1c_1)$$

соотношеніемъ

$$\varkappa\delta=-\theta. \tag{46}$$

Итакъ углы и разстоянія между двумя C-параллельными прямыми одинаковы для всѣхъ общихъ къ прямымъ перпендикуляровъ и связаны соотношеніемъ (45), если прямыя ξ-параллельны, и соотношеніемъ (46), если онѣ η-параллельны.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки одной изъ двухъ C-параллельныхъ линій находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ другой, и всѣ плоскости, проходящія черезъ одну изъ двухъ C-параллельныхъ, съ другой образуютъ равные углы. Такъ какъ $\varkappa$ число дѣйствительное въ эллиптическомъ пространствѣ и число мнимое въ пространствѣ Лобачевскаго, то изъ равенствъ (45) и (46) слѣдуетъ также, что линія C-параллельная съ данной дѣйствительной линіей дѣйствительна въ пространствѣ эллиптическомъ и мнима въ пространствѣ Лобачевскаго.

4. Двѣ C-параллельныя линіи, которымъ приписаны нѣкоторыя направленія, мы считаемъ одинаково направленными, когда начальныя точки прямыхъ лежатъ на одной и той же образующей абсолюта и различно-направленными въ противномъ случаѣ. Также направленія вращенія вокругъ двухъ C-параллельныхъ мы будемъ считать одинаковыми, если начальныя плоскости проходятъ черезъ одну и ту же образующую и различными въ противномъ случаѣ. Не трудно убѣдиться, что одинаковымъ направленіямъ двухъ C-параллельныхъ линій соотвѣтствуютъ одинаковыя направленія вращенія вокругъ нихъ.

Припишемъ линіи α какое-нибудь направленіе, напримѣръ будемъ считать точку a_1 начальной, а точку a_2—конечной. Оставляя линію α неподвижной будемъ перемѣщать линію β такъ, чтобы она постоянно пересѣкала линіи $\eta_1, \eta_2, a\varkappa b$ и будемъ всегда принимать за начальную ея точку ту точку, въ которой она пересѣкается съ η_1. При этихъ условіяхъ линія β всегда будетъ съ линіей α ξ-параллельна и одинаково направлена, а линія $a\varkappa b$ будетъ оставаться общимъ къ α и β перпендикуляромъ. Означимъ черезъ θ и δ уголъ и разстояніе между направленіями α и β, соотвѣтствующіе какому нибудь опредѣленному направленію общаго къ нимъ перпендикуляра $a\varkappa b$. При разсматриваемомъ намъ перемѣщеніи линіи β, уголъ θ, разстояніе δ и разность $\theta - \varkappa\delta$ могутъ измѣняться только непрерывно, а такъ какъ по доказанному выше разность $\theta - \varkappa\delta$ можетъ равняться или $(2n+1)\pi/k_2$, или $2n\pi/k_2$, гдѣ n цѣлое число, то эта разность всегда будетъ оставаться постоянной. Но она равняется $2\pi n/k_2$ когда линіи α и β совпадаютъ, а потому и всегда, каково бы ни было положе-

ніе линіи β, мы будемъ имѣть

$$\theta - \varkappa\delta = 2n\pi/k_2,$$

или, отбрасывая числа кратныя отъ $2\pi/k_2$,

$$\theta = \varkappa\delta. \tag{45}$$

Если бы линіи α и β были различно направлены, то

$$\theta = \varkappa\delta + \pi/k_2, \tag{47}$$

ибо въ этомъ случаѣ линіи α и β, когда онѣ совпадутъ, будутъ имѣть противоположное направленіе, разстояніе и уголъ между ними будутъ равняться нулю и π/k_2 соотвѣтственно.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы убѣдимся, что уголъ θ и разстояніе δ между направленіями двухъ γ_i-параллельныхъ линій связаны ур.

$$\theta = -\varkappa\delta \tag{46}$$

если онѣ одинаково направлены и ур.

$$\theta = -\varkappa\delta + \pi/k_2 \tag{48}$$

въ противномъ случаѣ.

5. Линія α', поляра линіи α, пересѣкаетъ всѣ четыре образующія $\xi_1, \xi_2, \gamma_1, \gamma_2$ и потому можетъ считаться и ξ- и γ_i-параллельной съ α. Всякая линія, пересѣкающая обѣ линіи α и α', будетъ служить общимъ къ нимъ перпендикуляромъ. Такъ какъ каждая точка одной изъ двухъ взаимныхъ поляръ перпендикулярна къ каждой точкѣ другой (§ 23), то всѣмъ общимъ къ α и α' перпендикулярамъ соотвѣтствуетъ одно и то же разстояніе $\pm\pi/2k_1$ и вслѣдствіе соотношеній (45) и (46) одинъ и тотъ же уголъ $\pm\pi/2k_2$. Если линіямъ α и α' мы припишемъ соотвѣтствующія (§ 51) направленія, то мы можемъ разсматривать ихъ какъ η-параллельныя и одинаково направленныя. Поэтому уголъ и разстояніе между соотвѣтствующими направленіями двухъ взаимныхъ поляръ связаны соотношеніемъ (46) и равняются

$$\pm\pi/2k_2, \quad \mp\pi/2k_1,$$

причемъ одновременно должны быть взяты или верхніе, или нижніе знаки.

6. Возьмемъ прямыя β и γ какъ угодно расположенныя въ пространствѣ (на нашемъ чертежѣ 14 изображенъ частный

случай, когда прямыя β и γ пересѣкаются) и будемъ искать прямыя линіи, которыя были бы ξ-параллельны съ β и η-параллельны съ γ. Съ этою цѣлью черезъ точки пересѣченія β и γ съ абсолютомъ проводимъ образующія абсолюта, черезъ точки пересѣченія β, b_1 и b_2,—образующія r_1, r_2, принадлежащія къ системѣ r, черезъ точки пересѣченія γ, c_1 и c_2,—образующія ξ_1, ξ_2, принадлежащія къ системѣ ξ. Искомыя нами прямыя должны пересѣкать всѣ четыре образующія ξ_1, ξ_2, r_1, r_2. Замѣчая, что каждая изъ прямыхъ ξ_1, ξ_2 пересѣкаетъ каждую изъ прямыхъ r_1, r_2, легко видѣть, что такихъ (искомыхъ) прямыхъ будетъ двѣ: прямая α, соединяющая точки $\xi_1 r_1$ и $\xi_2 r_2$ (точки a_1 и a_2 на чертежѣ 14) и прямая α', соединяющая точки $\xi_1 r_2$ и $\xi_2 r_1$. Такъ какъ плоскости, проведенныя черезъ прямыя α, ξ_1, r_2 и прямыя α, ξ_2, r_1 касаются абсолюта соотвѣтственно въ точкахъ $\xi_1 r_2$ и $\xi_2 r_1$, черезъ которыя проходитъ α', то α и α' взаимно полярны. Двѣ прямыя ε и ε', пересѣкающія четыре прямыхъ $\alpha, \alpha', \beta, \gamma$ будутъ общими къ нимъ перпендикулярами. Ибо линія β ξ-параллельна, а γ η-параллельна съ α, и линіи $\varepsilon, \varepsilon'$, какъ пересѣкающія α, α' и къ нимъ перпендикулярныя, будутъ по доказанному выше (2) перпендикулярны и къ β и γ. Итакъ существуетъ двѣ и только двѣ прямыя α и α', которыя ξ-параллельны съ данной линіей β и η-параллельны съ данной линіей γ. Линіи α и α' взаимно полярны и имѣютъ общіе съ β и γ перпендикуляры.

Припишемъ линіямъ β и γ какія нибудь направленія, напримѣръ примемъ точки b_1, c_1 за начальныя и b_2, c_2 за конечныя. Линія α будетъ одинаково или различно направлена съ обѣими линіями β и γ, смотря по тому, примемъ ли мы для нея точку $\xi_1 r_1$ (точку a_1) за начальную и точку $\xi_2 r_2$ (точку a_2)—за конечную, или обратно a_2—за начальную и a_1—за конечную. Линія α' будетъ направлена одинаково съ β и различно съ γ, если $\xi_2 r_1$ примемъ за начальную ея точку и $\xi_1 r_2$—за конечную, и будетъ направлена одинаково съ γ и различно съ β, если $\xi_1 r_2$ примемъ за начальную и $\xi_2 r_1$—за конечную. Такимъ образомъ существуетъ одна и только одна прямая α ξ-паралельная съ линіей β и η-параллельная съ линіей γ и обладающая тѣмъ свойствомъ, что одно ея направленіе будетъ одинаково, а другое противоположно съ направленіями обѣихъ прямыхъ β и γ, и существуетъ одна и только одна прямая α' ξ-параллельная съ β и η-параллельная съ γ и обладающая тѣмъ свойствомъ, что одно ея направленіе одинаково съ β и различно съ γ, а другое одинаково съ γ и различно съ β.

Если линія β касается абсолюта, то прямая η_2 совпадаетъ съ η_1. Искомыя прямыя должны пересѣкать линіи ξ_1,ξ_2 и касаться абсолюта въ какой нибудь точкѣ линіи η_1; линія η_1 единственная прямая, которая удовлетворяетъ этому условію, ибо прямыя ξ_1,ξ_2 пересѣкаются съ η_1 и не лежатъ въ одной плоскости. Если бы линія γ касалась абсолюта, то линія ξ_1 совпала бы съ ξ_2 и была бы искомой. Такимъ образомъ, когда одна изъ двухъ данныхъ прямыхъ β,γ, напримѣръ β, имѣетъ абсолютное направленіе, то существуетъ только одна линія $\xi(\eta)$-параллельная съ β и $\eta(\xi)$-параллельная съ γ—это образующая абсолюта, которая проходитъ черезъ точку касанія β съ абсолютомъ и принадлежитъ къ системѣ $\eta(\xi)$.

Если обѣ линіи β и γ касаются абсолюта, то прямыя ξ_1,η_1 совпадаютъ съ ξ_2,η_2. Въ этомъ случаѣ искомыя нами линіи ξ-параллельныя съ β и η-параллельныя съ γ должны касаться абсолюта какъ въ точкѣ прямой ξ_1, такъ и въ точкѣ прямой η_1. Такъ какъ прямая линія можетъ касаться къ поверхности второго порядка только въ одной точкѣ, то точкой касанія должна служить точка пересѣченія образующихъ ξ_1,η_1, и всякая прямая касательная къ абсолюту въ этой точкѣ и будетъ искомой. Итакъ, когда обѣ данныя линіи β,γ имѣютъ абсолютное направленіе, то существуетъ ∞^1 линій ξ-параллельныхъ съ β и η-параллельныхъ съ γ; онѣ всѣ проходятъ черезъ точку пересѣченія образующей η_1 системы η, проведенной черезъ точку касанія β, съ образующей ξ_1 системы ξ, проведенной черезъ точку касанія γ, и лежатъ въ плоскости касательной къ абсолюту, въ плоскости, которая очевидно проходитъ черезъ линіи ξ_1 и η_1.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію параллельныхъ Лобачевскаго. Замѣчая, что двѣ образующихъ ξ_1,η_1 абсолюта, принадлежащихъ къ различнымъ системамъ, пересѣкаются и лежатъ въ одной плоскости касательной къ абсолюту, мы видимъ, что двѣ прямыя линіи будутъ пересѣкать обѣ образующія ξ_1,η_1 1) если онѣ обѣ проходятъ черезъ точку пересѣченія ξ_1,η_1, 2) если онѣ обѣ лежатъ въ одной плоскости съ ξ_1,η_1 и въ 3) если одна проходитъ черезъ точку пересѣченія $\xi_1\eta_1$, а другая лежитъ въ плоскости $\xi_1\eta_1$. Поэтому мы можемъ различать три типа параллельныхъ Лобачевскаго.

1. Двѣ прямыя линіи будемъ называть $Л_1$-параллельными, если онѣ пересѣкаются въ точкѣ абсолюта; директрисами служатъ образующія абсолюта, проведенныя черезъ точку пересѣченія параллельныхъ. Черезъ каждую точку x къ дан-

ной линіи α проходятъ двѣ $Л_1$-параллельныхъ: линіи соединяющія точку x съ точками пересѣченія α съ абсолютомъ. Существуетъ четыре линіи $Л_1$-параллельныхъ къ двумъ даннымъ β и γ: линіи, которыя соединяютъ точки пересѣченія β и γ съ абсолютомъ.

Пусть двѣ $Л_1$-параллельныя линіи α и β пересѣкаются въ точкѣ a абсолюта. Такъ какъ поляры ихъ α' и β' лежатъ въ плоскости A касательной къ абсолюту въ точкѣ a, то всякая прямая проведенная черезъ a въ плоскости A пересѣкаетъ всѣ линіи $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ и должна считаться общимъ къ α и β перпендикуляромъ: между двумя $Л_1$-параллельными существуетъ ∞^1 общихъ перпендикуляровъ, образующихъ пучекъ прямыхъ абсолютнаго направленія съ центромъ въ точкѣ пересѣченія параллельныхъ. Если же мы будемъ разсматривать двѣ $Л_1$-параллельныхъ какъ предѣльное положеніе двухъ пересѣкающихся не параллельныхъ линій; то мы можемъ различать два общихъ къ нимъ перпендикуляра, линію ε, лежащую въ плоскости параллельныхъ, и линію ε' перпендикулярную къ этой плоскости. Такъ какъ длина вектора и уголъ ротора, для которыхъ линія абсолютнаго направленія служитъ лучомъ или осью равняются нулю, то уголъ и разстояніе между двумя $Л_1$-параллельными равняются нулю для всѣхъ общихъ къ нимъ перпендикуляровъ.—Если $Л_1$-параллельнымъ линіямъ мы приписываемъ направленія, то мы считаемъ ихъ одинаково направленными, когда точка ихъ пересѣченія служитъ начальной или конечной одновременно для обѣихъ прямыхъ и различно направленными, когда точка пересѣченія служитъ начальной для одной и конечной для другой линіи. Въ первомъ случаѣ соотвѣтствующія направленія вращенія вокругъ прямыхъ, мы будемъ считать одинаковыми, а во второмъ различными. Уголъ и разстояніе между направленіями двухъ $Л_1$-параллельными равняются 0 и 0, если параллельныя одинаково направлены, и π/k_2 и 0, если онѣ направлены различно. Ибо уголъ и разстояніе между направленіями двухъ прямыхъ, которыя, перемѣщаясь, остаются $Л_1$-параллельными, не измѣняются и, когда линіи совпадаютъ, имѣютъ значенія 0,0 въ первомъ случаѣ и π/k_2,0—во второмъ.

2. Двѣ прямыя линіи будемъ называть $Л_2$-параллельными, если онѣ лежатъ въ одной плоскости касательной къ абсолюту; директрисами служатъ образующія абсолюта, лежащія въ плоскости параллельныхъ. Въ каждой плоскости X къ данной линіи α находятся двѣ $Л_2$-параллельныхъ: линіи пересѣченія плоскости X съ плоскостями, проведенными

черезъ α и ласательными къ абсолюту. Существуетъ четыре линіи $Л_2$-параллельныхъ къ двумъ даннымъ β и γ: линіи пересѣченія плоскостей проведенныхъ черезъ β и γ и касательныхъ къ абсолюту.

Пусть двѣ $Л_2$-параллельныхъ линіи α и β лежатъ въ плоскости A, касающейся абсолюта въ точкѣ a. Такъ какъ α' и β', поляры линій α и β, проходятъ черезъ точку a, то всякая прямая, проведенная въ плоскости A черезъ точку a пересѣчетъ всѣ линіи $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ и можетъ считаться общимъ къ α и β перпендикуляромъ: между двумя $Л_2$-параллельными существуетъ ∞^1 общихъ перпендикуляровъ, образующихъ пучекъ прямыхъ абсолютнаго направленія съ центромъ въ точкѣ касанія плоскости параллельныхъ съ абсолютомъ. Если двѣ $Л_2$-параллельныхъ мы будемъ разсматривать какъ предѣльное положеніе двухъ, лежащихъ въ одной плоскости, прямыхъ линій, то мы можемъ различать два общихъ къ $Л_2$-параллельнымъ линіямъ перпендикуляра: линію ε, проходящую черезъ точку пересѣченія параллельныхъ, и линію ε' перпендикулярную къ этой точкѣ. Уголъ и разстояніе между двумя $Л_2$-параллельными равняются нулю для всѣхъ общихъ къ нимъ перпендикуляровъ.—Направленія вращенія вокругъ двухъ $Л_2$-параллельныхъ линій мы считаемъ одинаковыми, если плоскость параллельныхъ служитъ начальной или конечной для обѣихъ параллельныхъ и различными, если плоскость параллельныхъ служитъ начальной для одной и конечной для другой. Въ первомъ случаѣ соотвѣтствующія направленія параллельныхъ мы считаемъ одинаковыми, во второмъ различными. Углы и разстоянія между направленіями вращенія вокругъ двухъ $Л_2$-параллельныхъ равняются 0,0, если эти направленія одинаковы, и π/k_2,0, если они различны.

3. Двѣ прямыя линіи будемъ называть $Л_3$-параллельными, если одна изъ нихъ лежитъ въ плоскости касательной къ абсолюту и проведенной черезъ точку пересѣченія другой съ абсолютомъ. Черезъ каждую точку x проходитъ двѣ $Л_3$-параллельныхъ съ данной α: линіи, соединяющія точку x съ точками прикосновенія плоскостей, проведенныхъ черезъ α и касательныхъ къ абсолюту; въ каждой плоскости X находятся двѣ $Л_3$-параллельныхъ съ данной α: линіи пересѣченія плоскости X съ плоскостями касательными къ абсолюту въ точкахъ пересѣченія α съ абсолютомъ.

Если линія α проходитъ черезъ точку a, въ которой плоскость A, проведенная черезъ линію β касается абсолюта, то линіи α и β $Л_3$-параллельны. Такъ какъ въ этомъ случаѣ α', поляра α, лежитъ въ плоскости A, а линія β', поляра β,

проходитъ черезъ точку a, то между α и β существуетъ ∞^1 общихъ перпендикуляровъ, которые образуютъ пучекъ, лежащій въ плоскости A, съ центромъ въ точкѣ a. Разстоянія и углы между двумя $Л_3$-параллельными неопредѣленны.

Двѣ плоскости называются Л-параллельными, если онѣ пересѣкаются по прямой касательной къ абсолюту. Уголъ между двумя Л-параллельными плоскостями равняется нулю.

Двѣ точки называются Л-параллельными, если онѣ лежатъ на прямой касательной къ абсолюту. Разстояніе между двумя Л-параллельными точками равняется нулю.

Когда абсолютъ вырождается въ коническое сѣченіе S, лежащее въ плоскости O, двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ абсолюта совпадаютъ въ одну и обращаются въ касательныя къ кривой S. Поэтому различіе между ξ-, η- и $Л_1$-параллельными теряется: двѣ линіи будутъ ξ-, η- и $Л_1$-параллельны, если онѣ пересѣкаются въ точкѣ плоскости O. Двѣ плоскости будутъ параллельными, если онѣ съ плоскостью O пересѣкаются по одной прямой. Изъ сказаннаго въ § 34 видно, что лучи (оси) комоментовъ вектора (ротора) относительно различныхъ точекъ всѣ $Л_1$-параллельны съ лучомъ вектора (осью ротора).

Когда абсолютъ вырождается въ конусъ s съ вершиной въ точкѣ o, двѣ системы образующихъ абсолюта совпадаютъ въ одну и различіе между ξ-, η-, и $Л_2$-параллельными теряется: двѣ линіи будутъ ξ-, η- и $Л_2$-параллельны, если онѣ лежатъ въ одной плоскости съ o. Двѣ точки будутъ параллельными, если онѣ съ точкой o лежатъ на одной прямой. Лучи (оси) комоментовъ вектора (ротора) относительно различныхъ плоскостей всѣ $Л_2$-параллельны съ лучомъ вектора (осью ротора).

56. **Поверхности Clifford'a.**—Поверхность второго порядка, проходящую черезъ четыре образующія абсолюта $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ (см. чертежъ 14), изъ которыхъ первыя двѣ ξ_1,ξ_2 принадлежатъ къ системѣ ξ и другія двѣ η_1,η_2 къ системѣ η, мы будемъ называть поверхностью Clifford'a, а прямыя пересѣкающія всѣ четыре образующихъ $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2$,—осями этой поверхности. Черезъ линіи $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ можно провести ∞^1 поверхностей Clifford'a; всѣ онѣ имѣютъ общія оси.

Если образующія $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ раздѣльны, то существуютъ двѣ взаимныя поляры α и α', которыя пересѣкаютъ четыре прямыя $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ и для всѣхъ поверхностей Clifford'a черезъ нихъ проведенныхъ служатъ общими осями. Вообразивъ одну изъ этихъ поверхностей, поверхность C, изслѣдуемъ ея свойства, которыя, какъ сейчасъ увидимъ, тѣсно связаны со

свойствами параллельныхъ. Образующія одной системы поверхности C пересѣкаютъ линіи r_1, r_2, а другой системы— линіи ξ_1, ξ_2, а потому всѣ образующія одной системы поверхности C будутъ ξ-, а другой системы η-параллельны какъ между собой такъ и съ осями α и α'. Принимая во вниманіе это свойство поверхности C и припоминая, что всѣ точки одной изъ двухъ C-параллельныхъ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ другой, а всѣ плоскости, проведенныя черезъ одну изъ двухъ C-параллельныхъ, составляютъ одинаковые углы съ другой, мы видимъ, что всѣ точки поверхности C находятся на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ α и на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ α', а всѣ плоскости касательныя къ C составляютъ одинаковые углы съ α и одинаковые углы съ α'.

Возьмемъ какія нибудь образующія поверхности C, β и γ, принадлежащія къ различнымъ системамъ и пересѣкающіяся въ точкѣ y. Пусть взаимныя поляры xy и $x'y'$ (на нашемъ чертежѣ нѣтъ линіи $x'y'$) служатъ общими къ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$ перпендикулярами. Линія xy перпендикулярна къ плоскости $\beta\gamma$, а линія $x'y'$ лежитъ въ этой плоскости и перпендикулярна къ точкѣ y. Такъ какъ плоскость $\beta\gamma$ касается поверхности C въ точкѣ y, то мы можемъ сказать, что нормаль къ поверхности C въ точкѣ y и линія, лежащая въ касательной къ поверхности плоскости и перпендикулярная къ точкѣ касанія y взаимно полярны и пересѣкаютъ оси подъ прямымъ угломъ.

Если длина xy равняется δ, то углы между α и β, α и γ будутъ равняться $\varkappa\delta$ и $-\varkappa\delta$ соотвѣтственно, а уголъ между γ и β по свойству сложимости—

$$2\varkappa\delta.$$

Такъ какъ разстояніе δ точки y отъ оси α остается неизмѣннымъ, гдѣ бы ни находилась на поверхности C точка y, то всякія двѣ образующія поверхности C, принадлежащія къ различнымъ системамъ, составляютъ одинъ и тотъ же уголъ.

Возьмемъ еще двѣ образующихъ поверхности C, β' и γ' (на нашемъ чертежѣ линіи β' и γ' не изображены), изъ которыхъ первая, β', принадлежитъ къ одной системѣ съ β и пересѣкаетъ r_1 и r_2, а вторая, γ',—къ одной системѣ съ γ и пересѣкаетъ ξ_1 и ξ_2. Означая точки пересѣченія линій β и β' съ $r_1, \gamma, \gamma', r_2$ соотвѣтственно черезъ b_1, y, z, b_2 и b_1', y', z', b_2', по свойству поверхностей второго порядка имѣемъ

$$(b_1 b_2 yz) = (b_1' b_2' y' z'),$$

откуда слѣдуетъ, что разстоянія yz и $y'z'$ равны; также покажемъ, что и разстоянія yy' и zz' равны. Этому свойству поверхности C, по принципу двойственности соотвѣтствуетъ другое ея свойство: плоскости $\beta\gamma,\beta\gamma'$ образуютъ уголъ равный углу между плоскостями $\beta'\gamma,\beta'\gamma'$, а плоскости $\gamma\beta,\gamma\beta'$—уголъ равный углу между плоскостями $\gamma'\beta,\gamma'\beta'$.

Итакъ поверхность Clifford'a представляетъ геометрическое мѣсто точекъ равноудаленныхъ отъ оси и огибающую плоскостей, которыя составляютъ одинъ и тотъ же уголъ съ осью. Нормали къ поверхности и линіи, лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ и перпендикулярныя къ точкамъ касанія, пересѣкаютъ оси подъ прямымъ угломъ. Образующія одной системы этой поверхности, ξ-параллельныя съ осями, составляютъ съ образующими другой системы, η-параллельными съ осями, равные углы. Двѣ образующія одной системы отсѣкаютъ на образующихъ другой системы векторы одинаковой длины; пары плоскостей, проведенныхъ черезъ образующія одной системы и какія нибудь двѣ опредѣленныя образующія другой системы, составляютъ роторы съ одинаковыми углами.

Если производящая ξ_2 совпадаетъ съ ξ_1, то образующія поверхности C η-параллельныя между собой обращаются въ прямыя, которыя касаются абсолюта въ точкахъ линіи ξ_1, и вдоль этой линіи поверхность C касается абсолюта. Оси поверхности C совпадаютъ съ линіей ξ_1. Нормали къ поверхности и линіи, лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ и перпендикулярныя къ точкамъ касанія, пересѣкаютъ ξ_1. Если бы линія η_2 совпала съ η_1, то образующія поверхности C ξ-параллельныя между собой обратились бы въ касательныя къ абсолюту, и поверхность C касалась бы абсолюта вдоль прямой η_1, которая служила бы осью этой поверхности.

Если производящія ξ_2,η_2 совпадаютъ съ ξ_1,η_1, то образующія обѣихъ системъ поверхности C становятся касательными къ абсолюту; образующія одной системы (ξ-параллельныя) касаются въ точкахъ линіи η_1, а другой системы (η-параллельныя)—въ точкахъ линіи ξ_1, и поверхность C касается абсолюта вдоль обѣихъ прямыхъ ξ_1 и η_1. Осями поверхности C служатъ линіи касательныя къ абсолюту въ точкѣ a_1 пересѣченія линій ξ_1 и η_1. Въ разсматриваемомъ случаѣ поверхность C обращается въ предѣльную поверхность Лобачевскаго и свойства ея связаны съ теоріей Л-параллельныхъ. Возьмемъ на поверхности гдѣ нибудь точку y и проведемъ черезъ нее двѣ образующихъ поверхности C, β и γ, изъ которыхъ пер-

вая, β, касается абсолюта въ точкѣ b_1 прямой η_1, а вторая, γ,—въ точкѣ c_1 прямой ξ_1. Замѣчая, что плоскости $\beta\eta_1$ и $\gamma\xi_1$ касаются какъ къ абсолюту такъ и къ поверхности C въ точкахъ b_1 и c_1, мы видимъ, что линія ya_1 пересѣченія плоскостей $\beta\eta_1$ и $\gamma\xi_1$ будетъ полярна съ линіей b_1c_1 какъ по отношенію къ абсолюту, такъ и по отношенію поверхности C. Поэтому линія b_1c_1, линія пересѣченія плоскости $\beta\gamma$, касательной къ поверхности C въ точкѣ y, съ плоскостью $\xi_1\eta_1$, перпендикулярна къ точкѣ y, а линія ya_1 перпендикулярна къ плоскости $\beta\gamma$ и нормальна къ поверхности C. Такъ какъ точка y взята нами совершенно произвольно на поверхности C, то изъ сказаннаго мы заключаемъ: нормали къ поверхности C всѣ проходятъ черезъ одну и ту же точку абсолюта и всѣ между собой $Л_1$-параллельны; линіи, лежащія въ касательныхъ къ поверхности C плоскостяхъ и перпендикулярныя къ точкѣ касанія, лежатъ въ одной и той же плоскости $\xi_1\eta_1$ касательной къ абсолюту, и всѣ между собой $Л_2$-параллельны; нормаль къ поверхности C въ какой нибудь точкѣ y и линія перпендикулярная къ точкѣ y и лежащая въ плоскости касательной къ поверхности C образуютъ взаимныя поляры какъ по отношенію къ поверхности C такъ и по отношенію къ абсолюту.

Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя β и γ можно провести двѣ поверхности Clifford'a: одну мы получимъ, проводя черезъ точки прямой β линіи ξ-параллельныя съ γ, а другую, проводя черезъ точки прямой β линіи η-параллельныя съ γ.

Когда намъ дана поверхность Clifford'a, то построить ея оси не трудно: беремъ двѣ образующія поверхности—образующую β изъ системы ξ-параллельныхъ и образующую γ изъ системы η-параллельныхъ; линіи ξ-параллельныя съ β и η-параллельныя съ γ будутъ осями данной поверхности.

Въ пространствѣ абсолютъ котораго вырождается въ кривую S, лежащую на плоскости O, поверхности Clifford'a обращаются въ конусы, вершины которыхъ лежатъ въ плоскости O, и въ коническія сѣченія также расположенныя въ безконечно удаленной плоскости. Въ пространствѣ, абсолютъ котораго вырождается въ конусъ s съ вершиной o, поверхности Clifford'a обращаются въ коническія сѣченія въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ o и въ конусы съ вершиной въ точкѣ o.

57. **Комплексный уголъ между двумя прямыми.**—Второе весьма важное понятіе связанное съ комплексными числами

есть понятіе о комплексномъ углѣ между двумя прямыми въ пространствѣ.

Возьмемъ двѣ прямыя α и β и построимъ общіе къ нимъ перпендикуляры ε и ε'. Означая черезъ δ и θ разстояніе и уголъ между линіями α и β, соотвѣтствующіе какому нибудь опредѣленному винтовому направленію ε, мы будемъ называть комплексное число

$$\vartheta = \theta + \omega\delta,$$

принадлежащее къ системѣ комплексныхъ чиселъ съ характеристическимъ равенствомъ $\omega^2 = \varkappa^2$, комплекснымъ угломъ между α и β, соотвѣтствующимъ перпендикуляру ε и выбранному направленію его. Если линіямъ α и β приписаны нѣкоторыя направленія, а θ и δ опредѣлены по правиламъ § 54, то $\vartheta = \theta + \omega\delta$ будемъ называть комплекснымъ угломъ между направленіями α и β. Знакъ комплекснаго угла между α и β или ихъ направленіями мѣняется съ перемѣной направленія общаго къ нимъ перпендикуляра ε, такъ что этому послѣднему соотвѣтствуетъ два угла: ϑ и $-\vartheta$.

Второму перпендикуляру ε' отвѣчаютъ также два комплексныхъ угла

$$\vartheta' = \theta' + \omega\delta', \quad -\vartheta' = -(\theta' + \omega\delta'),$$

гдѣ θ' и δ' уголъ и разстояніе между α и β, соотвѣтствующіе перпендикуляру ε'. Припоминая теорему § 48, мы можемъ представить эту вторую пару комплексныхъ угловъ при помощи θ и δ; получимъ:

$$\vartheta' = \varkappa\delta + \omega\theta/\varkappa = \omega\vartheta/\varkappa,$$

для направленія ε', соотвѣтствующаго первоначальному направленію ε, и

$$-\vartheta' = -(\varkappa\delta + \omega\vartheta/\varkappa) = -\omega\vartheta/\varkappa$$

для противоположнаго направленія ε'. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема.—*Между двумя прямыми линіями или ихъ направленіями можетъ быть четыре комплексныхъ угла; каждому общему къ прямымъ перпендикуляру соотвѣтствуетъ два угла по одному на каждое направленіе перпендикуляра, отличающіеся одинъ отъ другого только знакомъ. Умноживъ комплексный уголъ, отвѣчающій нѣкоторому направленію одного изъ перпендикуляровъ на $\omega/\varkappa$, мы получимъ уголъ, отвѣчающій соотвѣтствующему направленію другого.*

Данное нами опредѣленіе комплекснаго угла не примѣнимо къ пространству безконечно большой кривизны, такъ какъ для этого пространства характеристическое равенство $\omega^2=\varkappa^2$ принимаетъ видъ $\omega^2=\infty$. Если бы однако мы хотѣли самостоятельно изслѣдовать пространство безконечно большой кривизны, не выводя его свойствъ помощью принципа двойственности изъ свойствъ пространства съ кривизной равной нулю, или если бы мы хотѣли получить формулы для пространства съ кривизной $\varkappa^2$, которыя были бы примѣнимы и къ пространству безконечно большой кривизны, то мы должны были бы вмѣсто комплекснаго угла пользоваться комплекснымъ разстояніемъ, назвавъ комплекснымъ разстояніемъ между линіями α и β (или направленіями ихъ), соотвѣтствующимъ выбранному направленію перпендикуляра ϵ, комплексное число

$$\vartheta+\omega'\theta,$$

принадлежащее къ системѣ комплексныхъ чиселъ съ характеристическимъ равенствомъ $\omega'^2=1/\varkappa^2$, которое для пространства безконечно большой кривизны обращается въ $\omega'^2=0$. Замѣтимъ, что понятіе о комплексномъ разстояніи между прямыми въ свою очередь теряетъ смыслъ въ пространствѣ съ кривизной равной нулю, ибо для этого пространства характеристическое равенство $\omega'^2=1/\varkappa^2$ обращается въ $\omega'^2=\infty$.

Мы сейчасъ упомянули и раньше имѣли случай уже не разъ упоминать, что свойства пространства безконечно большой кривизны могутъ быть выведены изъ свойствъ пространства, кривизна котораго равняется нулю, помощью принципа двойственности. Мы можемъ поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи не заботиться объ томъ, чтобы наши формулы выведенныя для пространства кривизны $\varkappa^2$ были бы непосредственно примѣнимы къ пространству съ безконечно большой кривизной; мы можемъ считать, что $k_2\neq 0$, и можемъ надлежащимъ выборомъ единицы угла всегда сдѣлать $k_2=1$, и тогда $k_1=k_2\varkappa=\varkappa$. Если бы впрочемъ мы захотѣли въ наши формулы снова ввести число k_2, то стоило бы только замѣнить въ нихъ $\varkappa$ черезъ k_1, ω—черезъ ωk_2 и буквы, означающія тензоры роторовъ и моторовъ, углы простые и комплексные, произведеніями тѣхъ же буквъ на k_2. Итакъ, повторяю, въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ считать $k_2=1$, $k_1=\varkappa$.

Разсмотримъ теперь нѣсколько подробнѣе свойства комплекснаго угла.

1. Такъ какъ уголъ и разстояніе между двумя прямыми линіями опредѣляются до величинъ кратныхъ отъ π и $\pi/\varkappa$,

то комплексный уголъ между двумя прямыми опредѣляется до чиселъ вида

$$\pi(m+n\omega/\varkappa), \text{ или } \pi[(m+n)]\xi+(m—n)\eta],$$

гдѣ m и n какія нибудь цѣлыя числа. Второе мы можемъ представить въ видѣ

$$\pi(m\xi+n\eta),$$

если подъ m и n будемъ подразумѣвать цѣлыя числа одновременно четныя или нечетныя.

2. Принимая во вниманіе свойства угла и разстоянія между двумя прямыми, которымъ приписаны направленія (см. § 54), увидимъ, что комплексный уголъ между направленіями двухъ прямыхъ опредѣляется до чиселъ

$$2\pi(m\xi+n\eta),$$

гдѣ m и n какія нибудь цѣлыя числа, и мѣняется на

$$\pi(\xi+\eta)=\pi,$$

когда мы измѣнимъ направленіе одной изъ двухъ прямыхъ на противоположное.

3. Если α, β и γ имѣютъ общіе перпендикуляры, то, означая черезъ $\vartheta,\vartheta_1,\vartheta_2$ комплексные углы между α и β β и γ, α и γ (или между направленіями этихъ линій), по свойству сложимости угловъ и разстояній имѣемъ

$$\vartheta_2=\vartheta+\vartheta_1.$$

Комплексные углы обладаютъ, слѣдовательно, также свойствомъ сложимости.

4. Комплексный уголъ между двумя C-параллельными имѣетъ видъ

$$\vartheta=2\theta\xi,$$

когда онѣ ξ-параллельны и одинаково направлены, видъ

$$\vartheta=2\theta\eta,$$

когда онѣ η-параллельны и одинаково направлены, видъ

$$\vartheta=2\theta\xi+\pi(\xi+\eta),$$

когда онѣ ξ-параллельны и различно направлены, видъ

$$\vartheta = 2\theta\eta + \pi(\xi + \eta),$$

когда онѣ η-параллельны и различно направлены. Между двумя C-параллельными линіями (или направленіями ихъ) только два комплексныхъ угла, ибо существуетъ ∞^1 общихъ перпендикуляровъ къ двумъ C-параллельнымъ и всѣмъ имъ соотвѣтствуетъ одно и то же разстояніе и одинъ и тотъ же уголъ. Мы можемъ говорить, если угодно, что между двумя C-параллельными линіями также четыре комплексныхъ угла, но два изъ нихъ равны двумъ другимъ.

5. Комплексный уголъ между направленіями двухъ взаимныхъ поляръ равняется

$$\pi\eta,$$

когда направленія поляръ соотвѣтствуютъ одно другому (см. § 55_5) и

$$\pi\xi,$$

въ противномъ случаѣ.

6. Комплексный уголъ между двумя $Л_1$- или $Л_2$-параллельными равняется нулю, когда онѣ одинаково направлены и $\pi(\xi+\eta)$—въ противномъ случаѣ. Мы можемъ говорить, если угодно, что между двумя $Л_1$- или $Л_2$-параллельными (или ихъ направленіями) также четыре угла, но всѣ они равны между собой. Комплексный уголъ между двумя $Л_3$-параллельными не имѣетъ опредѣленнаго значенія.

7. Если ϑ комплексный уголъ между направленіями α и β, то по свойству сложимости комплексный уголъ между направленіями линіи α и линіи β', поляры β, равняется

$$\vartheta + \pi\eta,$$

когда направленіе β' соотвѣтствуетъ направленію β и

$$\vartheta + \pi\xi$$

въ противномъ случаѣ.

58. **Тригонометрическія функціи комплексныхъ угловъ.**— Разсмотримъ, какими свойствами обладаютъ косинусъ и синусъ комплекснаго угла между двумя прямыми или ихъ направленіями. По формуламъ (77) и (78) § 20 мы имѣемъ

$$\sin\vartheta = \sin(\theta + \omega\delta) = \sin\theta\cos\varkappa\delta + \frac{\omega}{\varkappa}\cos\theta\sin\varkappa\delta,$$

$$\cos\vartheta = \cos(\theta + \omega\delta) = \cos\theta\cos\varkappa\delta - \frac{\omega}{\varkappa}\sin\theta\sin\varkappa\delta,$$

или, если введемъ вмѣсто модуля умноженія и числа ω комплексныя единицы ξ и η,

$$\sin\vartheta=\sin(\theta+\omega\delta)=\sin(\theta+\varkappa\delta)\xi+\sin(\theta-\varkappa\delta)\eta,$$
$$\cos\vartheta=\cos(\theta+\omega\delta)=\cos(\theta+\varkappa\delta)\xi+\cos(\theta-\varkappa\delta)\eta.$$

Для модуля и аргумента $\sin\vartheta$ имѣемъ формулы:

$$\sqrt{\sin(\theta+\varkappa\delta)\sin(\theta-\varkappa\delta)},\quad \frac{1}{2\varkappa}\log\frac{\sin(\theta+\varkappa\delta)}{\sin(\theta-\varkappa\delta)};$$

для модуля и аргумента $\cos\vartheta$—формулы:

$$\sqrt{\cos(\theta+\varkappa\delta)\cos(\theta-\varkappa\delta)},\quad \frac{1}{2\varkappa}\log\frac{\cos(\theta+\varkappa\delta)}{\cos(\theta-\varkappa\delta)}.$$

Изъ этихъ формулъ мы выводимъ слѣдующія заключенія.

1. Такъ какъ комплексный уголъ между двумя прямыми α и β, опредѣляясь до чиселъ вида $[(m+n)\xi+(m-n)\eta]$, можетъ имѣть безчисленное множество значеній

$$\vartheta'=\vartheta+\pi[(m+n)\xi+(m-n)\eta]$$

гдѣ ϑ одно изъ возможныхъ, то синусы и косинусы комплексныхъ угловъ между α и β, соотвѣтствующихъ одному и тому же перпендикуляру, имѣютъ по два значенія:

$$\sin\vartheta\ ,\quad -\sin\vartheta\ ,$$
$$\cos\vartheta\ ,\quad -\cos\vartheta\ .$$

Значенія синусовъ и косинусовъ другихъ угловъ между α и β, отвѣчающихъ второму перпендикуляру, суть:

$$\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta\ ,\quad -\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta$$
$$\cos\vartheta\ ,\quad -\cos\vartheta.$$

2. Комплексный уголъ между направленіями прямыхъ α и β, опредѣляясь до чиселъ вида $2\pi(m\xi+n\eta)$, представляющихъ періоды тригонометрическихъ функцій, можетъ имѣть значенія

$$\vartheta'=\vartheta+2\pi(m\xi+n\eta),$$

а потому синусъ и косинусъ комплекснаго угла между направленіями α и β могутъ имѣть только по одному значенію $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Если направленіе одной изъ двухъ линій α и β измѣнимъ на противоположное, то комплексный уголъ измѣнится на π, а синусъ и косинусъ его измѣнятъ свой знакъ. Такъ какъ

$$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta,\ \sin\left(\frac{\omega}{\varkappa}\,\vartheta\right)=\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta,$$

$$\sin\left(-\frac{\omega}{\varkappa}\,\vartheta\right)=-\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta,$$

$$\cos(-\vartheta)=\cos\left(\frac{\omega}{\varkappa}\,\vartheta\right)=\cos\left(-\frac{\omega}{\varkappa}\,\vartheta\right)=\cos\vartheta\ ,$$

то синусы всѣхъ четырехъ комплексныхъ угловъ между направленіями α и β вообще различны, а косинусы одинаковы. Синусы двухъ угловъ, отвѣчающихъ одному и тому же перпендикуляру, отличаются знакомъ; синусы угловъ, соотвѣтствующихъ одному общему перпендикуляру, получаются изъ синусовъ угловъ, отвѣчающихъ другому, если послѣдніе умножимъ на $\pm\omega/\varkappa$.

3. Если линіи α и β C-параллельны, то синусы и косинусы комплексныхъ угловъ между ними равняются

$$\sin 2\theta.\xi \quad \text{и} \quad \cos 2\theta.\xi+\eta,$$
$$\sin 2\theta.\eta \quad \text{и} \quad \cos 2\theta.\eta+\xi,$$

смотря по тому будутъ ли они ξ- или η-параллельны.

4. Если линіи α и β взаимно полярны, то синусъ и косинусъ комплекснаго угла между ихъ направленіями равняются 0 и $\omega/\varkappa$, когда направленіе β соотвѣтствуетъ направленію α, и 0 и $-\omega/\varkappa$, въ противномъ случаѣ.

5. Если линіи α и β $Л_1$- или $Л_3$-параллельны, то синусъ и косинусъ комплекснаго угла между ихъ направленіями равняются

$$0,+1, \quad \text{или} \quad 0,-1,$$

смотря по тому имѣютъ ли α и β одинаковое или различное направленіе.

6. Изъ равенствъ

$$\sin(\vartheta+\pi\eta)=\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta\ ,\ \sin(\vartheta+\pi\xi)=-\frac{\omega}{\varkappa}\sin\vartheta,$$

$$\cos(\vartheta+\pi\eta)=\frac{\omega}{\varkappa}\cos\vartheta\ ,\ \cos(\vartheta+\pi\xi)=-\frac{\omega}{\varkappa}\cos\vartheta,$$

видно, что умноживъ синусъ и косинусъ комплекснаго угла

между направленіями α и β на $\pm\omega/\varkappa$, получимъ синусъ и косинусъ комплекснаго угла между направленіями линіи α и линіи β', поляры β.

7. Для даннаго значенія $\sin\vartheta$ комплексный уголъ можетъ имѣть четыре значенія:

$$\vartheta, \pi\xi - \vartheta\frac{\omega}{\varkappa}, \pi\eta + \vartheta\frac{\omega}{\varkappa}, \pi(\xi+\eta) - \vartheta,$$

не различающихся между собой на періоды $2\pi(m\xi+n\eta)$; для даннаго значенія $\cos\vartheta$ комплексный уголъ можетъ имѣть также четыре значенія:

$$\vartheta, -\vartheta, \frac{\omega}{\varkappa}\vartheta, -\frac{\omega}{\varkappa}\vartheta,$$

не различающихся на періоды. По даннымъ значеніямъ синуса и косинуса комплексный уголъ опредѣляется до періодовъ.

8. $\sin\vartheta=0$ только тогда, когда линіи α и β или совпадаютъ, или $Л_1$-, или $Л_2$-параллельны, или, наконецъ, взаимно полярны. $\cos\vartheta=0$ только тогда, когда линіи α и β взаимно перпендикулярны.

59. **Моторъ какъ совокупность двухъ прямыхъ.**—Подобно тому какъ векторъ есть совокупность двухъ точекъ, роторъ — совокупность двухъ плоскостей, такъ моторъ можетъ быть разсматриваемъ какъ совокупность двухъ прямыхъ.

Дѣйствительно, возьмемъ какую нибудь пару прямыхъ линій α и β какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ и, принимая совокупность ихъ за нѣчто цѣлое, назовемъ, чтобы отличить одну отъ другой, одну, напримѣръ α, начальной, а другую, β, конечной. Проведя общіе къ нимъ перпендикуляры ε и ε', которые, какъ мы знаемъ, представляютъ собой взаимныя поляры, и назвавъ точки пересѣченія ихъ съ α и β черезъ a,b,d,e (см. чертежъ 13), мы можемъ построить весьма просто такія системы.

1, два вектора

$$\sigma=ab,\ \varrho=de,$$

лежащіе на ε и ε', и имѣющіе начальныя точки a и d на начальной прямой α и конечныя точки на конечной прямой β;

2, два ротора

$$\mathrm{G}=adeb,\ \mathrm{P}=dabe,$$

у которыхъ линіи ε и ε' служатъ осями и начальныя пло-

скости *ade* и *dab* проходятъ черезъ начальную прямую α, а конечныя *deb* и *abe*—черезъ конечную β;

3, векторъ и роторъ

$$\sigma = ab,\ \mathrm{P} = dabe,$$

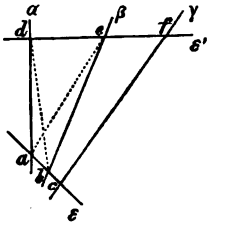
у которыхъ линія ε служитъ лучомъ и осью, начальныя точка и плоскость опредѣляются начальной прямой α, а конечныя—конечной прямой β;

4, векторъ и роторъ

$$\varrho = de,\ \mathrm{G} = adeb$$

у которыхъ линія ε' служитъ лучомъ и осью, начальныя точка и плоскость опредѣляются начальной прямой α, а конечныя—конечной прямой β.

Чертежъ 13.



Такъ какъ роторы G и P полярны съ векторами σ и ϱ соотвѣтственно, то системы 1,2,3,4 могутъ быть преобразованы одна въ другую операціей поляризованія и значитъ между собой эквивалентны. Моторы (σ,P) и (ϱ,G) равны и служатъ видоизмѣненіями одного и того же мотора, скажемъ τ, который линіи ε и ε' имѣетъ своими осями. Моторъ τ обращается въ (σ,P), когда точка приведенія его находится на линіи ε, и въ (ϱ,G), когда точка приведенія лежитъ на линіи ε'; онъ эквивалентенъ съ одной стороны системѣ векторовъ (σ,ϱ), лежащимъ на его осяхъ ε и ε', а съ другой—системѣ роторовъ (G,P), имѣющихъ его оси своими осями. Означая черезъ $\vartheta = \theta + \omega\delta$ комплексный уголъ между линіями α и β, соотвѣтствующій какому нибудь винтовому направленію ε, и замѣчая, что δ есть длина ab, θ—уголъ *dabe*,

$$\mathrm{T}(\sigma) = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{tang}\varkappa\delta,\ \ \mathrm{T}(\mathrm{P}) = \mathrm{tang}\theta$$

мы имѣемъ для тензора τ, соотвѣтствующаго выбранному направленію ε, выраженіе

$$T(\tau)=\operatorname{tang}\theta+\frac{\omega}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa\delta=\frac{\sin\vartheta}{\cos\theta\cos\varkappa\delta}.$$

Его модуль и аргументъ равняются

$$\frac{\sqrt{\sin(\theta+\varkappa\delta)\sin(\theta-\varkappa\delta)}}{\cos\theta\,\cos\varkappa\delta},\ \frac{1}{2\varkappa}\log\frac{\sin(\theta+\varkappa\delta)}{\sin(\theta-\varkappa\delta)}.$$

Итакъ совокупность двухъ прямыхъ линій опредѣляетъ нѣкоторый моторъ: общіе къ нимъ перпендикуляры служатъ осями мотора, тензоры мотора выражаются черезъ углы и разстояніями между прямыми. Задать такимъ образомъ двумя прямыми линіями мы можемъ всякій моторъ. Ибо мы докажемъ въ слѣдующей главѣ, что всякій моторъ τ, каковъ бы онъ нибылъ, всегда имѣетъ двѣ оси ε и ε', которыя по теоремѣ § 41 непремѣнно взаимно полярны. Построивъ векторъ ab и роторъ $dabe$—элементы даннаго мотора τ для точки приведенія a, находящейся на оси, проведемъ черезъ точки a и b вектора ab линіи α и β, лежащія въ плоскостяхъ ротора $dabe$, перпендикулярныя къ ε и слѣдовательно пересѣкающія ε': черезъ начальную точку a вектора ab—линію α, лежащую въ начальной плоскости dab ротора $dabe$, черезъ конечную точку b вектора ab—линію β, лежащую въ конечной плоскости abe ротора $dabe$. Линіи α и β и будутъ опредѣлять моторъ τ въ указанномъ выше смыслѣ.

Имѣя возможность всякій моторъ задать двумя прямыми и зная, что обратно всякая пара прямыхъ опредѣляетъ одинъ и только одинъ моторъ, мы можемъ отождествить моторъ съ парой прямыхъ, если условимся различать одну прямую отъ другой, назвавъ одну начальной, а другую конечной, и можемъ разсматривать теорію моторовъ какъ отрасль геометріи, принимающую пару прямыхъ своимъ элементомъ.

60. **Зависимость между углами и тензорами суммы и слагаемыхъ.** — Важное значеніе понятій о тензорѣ мотора и комплексномъ углѣ обнаружится, если мы найдемъ зависимость между тензоромъ мотора, тензоромъ его проэкціи и комплексномъ угломъ между осью мотора и осью проэкціи. Чтобы найти эту зависимость, мы займемся сначала выводомъ формулъ, которыя связываютъ между собой тензоръ суммы, тензоры слагаемыхъ вектора и ротора и углы между направленіями ихъ лучей или осей.

Вернемся къ обозначеніямъ и формуламъ § 54 и предположимъ, что $oz=ox+oy$. Въ силу этого предположенія координаты точки z будутъ связаны съ координатами точекъ

x,o,y соотношеніями (6) § 25, которыя теперь при нашемъ выборѣ координатнаго тетраэдра, когда

$$o_1=0,\ o_2=0,\ o_3=1,\quad o_4=0,\ x_4=y_4=z_4=0,$$
$$O_1=0,\ O_2=0,\ O_3=a_{33},\ O_4=a_{34}$$

обратятся въ слѣдующіе

$$\sigma z_1=a^2_{33}x_3y_1+a^2_{33}y_3x_1,$$
$$\sigma z_2=a^2_{33}x_3y_2+a^2_{33}y_3x_2,$$
$$\sigma z_3=a^2_{33}x_3y_3.$$

Изъ нихъ мы выводимъ

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{x_1}{x_3}+\frac{y_1}{y_3},\quad \frac{z_2}{z_3}=\frac{x_2}{x_3}+\frac{y_2}{y_3},$$

затѣмъ $$u_z=u_x+u_y,\ v_z=v_x+v_y,$$

и, наконецъ, принимая во вниманіе равенства (35), (37) и (40) и полагая въ нихъ согласно нашему условію $k_2=1$,

$$T_{oz}e^{iw}=T_{ox}e^{iu}+T_{oy}e^{iv}, \tag{49}$$

$$T_{oz}e^{-iw}=T_{ox}e^{-iu}+T_{oy}e^{-iv}. \tag{50}$$

Умноживъ эти равенства на e^{-iv} и на $-e^{iv}$ и сложивъ, будемъ имѣть

$$T_{oz}\sin(w-v)=T_{ox}\sin(u-v);$$

умноживъ ихъ на e^{-iu} и на $-e^{iu}$ и сложивъ, получаемъ

$$T_{oz}\sin(w-u)=T_{oy}\sin(v-u).$$

Введя въ эти два равенства углы (xoz), (zoy), (xoy) между направленіями лучей ox, oy, и oz, мы приведемъ ихъ къ виду

$$\frac{T_{ox}}{\sin(zoy)}=\frac{T_{oy}}{\sin(xoz)}=\frac{T_{oz}}{\sin(xoy)}. \tag{51}$$

Эти послѣдніе равенства, вмѣстѣ съ равенствомъ

$$(xoz)+(zoy)=(xoy) \tag{52}$$

и представляютъ собой искомыя нами основныя соотношенія

между тензорами слагаемыхъ векторовъ, тензоромъ ихъ суммы и углами, которые ихъ лучи образуютъ одинъ съ другимъ. Мы приведемъ здѣсь еще два соотношенія между тѣми же величинами, соотношенія, которыя могутъ быть выведены изъ (51) и (52), которыя однако получаются проще прямо изъ (49) и (50), если мы перемножимъ ихъ почленно, одинъ разъ ничего въ нихъ не измѣняя, а въ другой, перенеся предварительно члены, содержащіе v, въ первую часть. Сдѣлавъ это и принявъ во вниманіе равенства (39) и (41) § 54, получимъ

$$T^2_{ox}=T^2_{ox}+T^2_{oy}+2T_{ox}T_{oy}\cos(xoy) \qquad (53)$$

$$T^2_{oy}=T^2_{ox}+T^2_{oz}-2T_{ox}T_{oz}\cos(xoz) \qquad (54)$$

Первое изъ этихъ ур. можетъ служить для вычисленія тензора суммы, а второе, такъ какъ $oy=oz-ox$, тензора разности двухъ векторовъ.

Видоизмѣняя всѣ разсужденія этого параграфа и параграфа 54 согласно съ принципомъ двойственности, мы пришли бы къ формуламъ подобнымъ (51), (52), (53) и (54), а именно, означая черезъ T_{OX}, T_{OY} T_{OZ} тензоры роторовъ OX, OY, OZ, черезъ (XOZ), (ZOX), (XOY) углы между положительными направленіями ихъ осей, (направленіями вращенія вокругъ осей) и предполагая, что $OZ=OX+OY$, мы получили бы

$$\frac{T_{OX}}{\sin(ZOY)}=\frac{T_{OY}}{\sin(XOZ)}=\frac{T_{OZ}}{\sin(XOY)}, \qquad (55)$$

$$(XOZ)+(ZOY)\doteq(XOY),$$

$$T^2_{OZ}=T^2_{OX}+T^2_{OY}+2T_{OX}T_{OY}\cos(XOY), \qquad (56)$$

$$T^2_{OY}=T^2_{OX}+T^2_{OZ}-2T_{OX}T_{OZ}\cos(XOZ). \qquad (57)$$

Разсмотримъ, какъ упрощаются выведенныя нами формулы въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

1. Если векторы ox и oy лежатъ на одной прямой, то, принявъ одно и то же направленіе этой прямой за ихъ положительное направленіе, мы будемъ имѣть $(xoy)=0$ (см. § 54) и изъ равенства (53) получимъ

$$T_{oz}=\pm(T_{ox}+T_{oy}).$$

Знакъ, который долженъ быть взятъ въ этомъ равенствѣ, зависитъ отъ того направленія, которое для луча oz мы принимаемъ за положительное; если оно совпадаетъ съ положитель-

нымъ направленіемъ ox и oy, то мы должны будемъ брать знакъ +, въ чемъ мы убѣдимся слѣдующимъ разсужденіемъ. Отношеніе T_{oz} къ $T_{oc}+T_{oy}$ представляетъ собой непрерывную функцію координатъ точекъ o,x,y,z. Такъ какъ съ другой стороны, какъ видно изъ послѣдняго равенства, это отношеніе можетъ имѣть только два различныхъ значенія ± 1, то оно, измѣняясь непрерывно, всегда должно сохранять одно и то же значеніе, пока $oz=ox+oy$ и векторы ox и oy лежатъ на одной прямой. Но предполагая, что положительное направленіе oz одинаково съ положительными направленіями векторовъ ox и oy, въ частномъ случаѣ $ox=0$ мы имѣемъ $oy=oz$, $T_{oy}=T_{oz}$ и отношеніе, о которомъ идетъ рѣчь, равняется $+1$. Поэтому равенство

$$T_{oz}=T_{ox}+T_{oy},$$

повѣряясь для частнаго случая $ox=0$, будетъ вѣрно и всегда, каковы бы ни были векторы ox и oy; изъ него мы имѣемъ

$$T_{oy}=T_{oz}-T_{ox}.$$

Итакъ тензоръ суммы равняется суммѣ тензоровъ, тензоръ разности—разности тензоровъ.

Если $oz=ox+oy=0$, то $T_{oz}=0=T_{ox}+T_{oy}$. Векторы, сумма которыхъ равняется нулю, мы назвали равными и прямопротивоположными (см. § 29); мы можемъ поэтому сказать, что тензоры равныхъ и прямопротивоположныхъ векторовъ различаются только знакомъ, если для обоихъ одно и то же направленіе общаго имъ луча примемъ за положительное. Обратно, два вектора, имѣющіе общій лучъ, одно и то же положительное направленіе, равные по абсолютной величинѣ, но различающіеся знакомъ тензоры, при сложеніи даютъ векторъ равный нулю и значитъ равны и прямо-противоположны. Векторы ox и xo равны и прямо-противоположны:

$$ox=-xo,$$

ибо $T_{ox}=-T_{xo}$.

Совершенно такимъ образомъ мы выводимъ изъ ур. (56) для того случая, когда оси слагаемыхъ роторовъ совпадаютъ,

$$T_{OZ}=T_{OX}+T_{OY}$$

и убѣждаемся, что тензоры равныхъ прямо-противоположныхъ роторовъ различаются между собой только знакомъ, если по-

ложительныя направленія ихъ совпадаютъ, и что роторы OX и XO равны и прямо-противоположны:

$$OX=-XO.$$

2. Если лучи векторовъ ox и oy взаимно перпендикулярны, то каждый изъ нихъ будетъ проэкціей суммы oz на направленіе своего луча, $(xoy)=\pm\pi/2$,

$$(xoz)+(zoy)=\pm\pi/2, \tag{58}$$

и изъ формулъ (51) и (53) мы получаемъ

$$\mathrm{T}_{ox}=\mathrm{T}_{oz}\cos(xoz),\ \mathrm{T}_{oy}=\mathrm{T}_{oz}\cos(zoy). \tag{59}$$
$$\mathrm{T}^2_{oz}=\mathrm{T}^2_{ox}+\mathrm{T}^2_{oy}.$$

Второе изъ этихъ равенствъ, введя въ него уголъ (xoz), мы можемъ представить въ въ другомъ видѣ:

$$\mathrm{T}_{oy}=\pm\mathrm{T}_{oz}\sin(xoz),$$

причемъ знакъ второй части будетъ зависѣть отъ знака въ (58). Этотъ послѣдній обусловливается въ свою очередь направленіемъ лучей ox и oy. Мы всегда можемъ, взявъ произвольно направленіе луча ox, выбрать направленіе луча oy такъ, что $(xoy)=\pi/2$, ибо съ перемѣной направленія луча oy на противоположное уголъ (xoy) будетъ измѣняться на π. Предполагая, что выборъ направленія oy сдѣланъ такимъ именно образомъ, мы должны въ (58) взять верхній знакъ и тогда вмѣсто (59) будемъ имѣть формулы

$$\mathrm{T}_{ox}=\mathrm{T}_{ox}\cos(xoz),\ \mathrm{T}_{oy}=\mathrm{T}_{ox}\sin(xoz), \tag{60}$$

содержащія одинъ только уголъ (xoz).

Если оси роторовъ OX и OY взаимно перпендикулярны, то изъ формулъ (55) и (56), получимъ формулы

$$\mathrm{T}_{OX}=\mathrm{T}_{OZ}\cos(XOZ),\ \mathrm{T}_{OY}=\mathrm{T}_{OZ}\cos(ZOY) \tag{61}$$
$$\mathrm{T}^2_{OZ}=\mathrm{T}^2_{OX}+\mathrm{T}^2_{OY}$$

или $$\mathrm{T}_{OX}=\mathrm{T}_{OZ}\cos(XOZ),\ \mathrm{T}_{OY}=\mathrm{T}_{OZ}\sin(XOZ)$$

подобныя (59) и (60).

Чтобы имѣть возможность короче выразить словами формулы (59) и (61), мы введемъ два новыхъ понятія. Алгебраи-

ческой проэкціи вектора на данное направленіе луча α, проходящаго черезъ его начало, мы будемъ называть тензоръ геометрической проэкціи вектора на линію α, вычисленный въ предположеніи, что направленіе луча α служитъ положительнымъ для проэкціи. Такъ какъ знакъ тензора вектора зависитъ отъ направленія его луча, то очевидно, что знакъ алгебраической проэкціи будетъ мѣняться съ перемѣной направленія луча α на противоположное. Алгебраической проэкціей ротора на данное направленіе оси α, лежащей въ начальной плоскости ротора, мы будемъ называть тензоръ геометрической проэкціи ротора на линію α, вычисленный въ предположеніи, что данное направленіе вращенія вокругъ α служитъ положительнымъ для проэкціи. Очевидно, что знакъ алгебраической проэкціи будетъ мѣняться съ перемѣной направленія оси α на противоположное. Въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраическихъ или геометрическихъ проэкціяхъ, тѣ и другія просто будемъ называть проэкціями.

Пользуясь этими новыми понятіями, мы можемъ выразить формулы (59) и (61) слѣдующимъ образомъ:

Проэкція вектора на данное направленіе луча, проходящаго черезъ его начало, равняется произведенію тензора вектора на косинусъ угла между положительнымъ направленіемъ вектора и направленіемъ луча проэкціи.

Поэкція ротора на данное направленіе оси, лежащей въ начальной плоскости ротора, равняется произведенію тензора ротора на косинусъ угла между положительнымъ направленіемъ ротора и направленіемъ оси проэкціи.

3. Если лучи ox и oy взаимно перпендикулярны, а конецъ z вектора oz лежитъ на абсолютѣ, то лучъ oz, назовемъ его γ, и линія zx, проэктирующая векторъ oz на лучъ ox и перпендикулярная къ ox, назовемъ ее γ', пересѣкаются въ точкѣ z абсолюта и значитъ $Л_1$-параллельны, а лучъ ox можетъ быть разсматриваемъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки o линіи γ, одной изъ двухъ $Л_1$-параллельныхъ, на другую, линію γ'. Уголъ между линіей γ и ox, представляющій собой, какъ сейчасъ увидимъ, функцію только длины a вектора ox, называется, какъ извѣстно, угломъ параллельности, соотвѣтствующимъ разстоянію a и означается черезъ $\Pi(a)$. Чтобы получить выраженіе этой функціи, намъ стоитъ только въ формулѣ (59) подставить тѣ значенія, вхо-

дящихъ въ нее величинъ, которыя они теперь въ нашемъ случаѣ имѣютъ, а именно

$$T_{ox}=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa a,\quad T_{oz}=\frac{i}{\varkappa},\quad (xoz)=\Pi(a);$$

тогда получимъ $\operatorname{tang}\varkappa a=i\cos\Pi(a)$,

откуда
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(a)=e^{i\varkappa a} \tag{62}$$

—извѣстная формула Лобачевскаго.

Принципъ двойственности внушаетъ намъ мысль ввести уголъ параллельности и въ теорію $Л_2$-параллельныхъ. Проведемъ черезъ какую нибудь линію γ' какую нибудь плоскость X и въ ней линію ε перпендикулярную къ γ'. Черезъ ε проводимъ плоскость O, образующую съ X уголъ θ, а въ плоскости O строимъ линіи γ и γ_1 $Л_2$-параллельныя съ γ'. Уголъ между γ и ε, который равняется углу между γ_1 и ε и представляетъ собой функцію угла θ, мы назовемъ угломъ параллельности между двумя $Л_2$-параллельными соотвѣтствующимъ углу θ. Означивъ его черезъ $\pi(\theta)$, по принципу двойственности, изъ (62) выводимъ

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi(\theta)=e^{i\theta}. \tag{63}$$

Такъ какъ въ эту формулу $\varkappa$ не входитъ, то она примѣнима безъ всякаго измѣненія ко всякому пространству, кривизна котораго не безконечно велика.

Воспользуемся выведенными нами формулами во-первыхъ для вычисленія тензоровъ комоментовъ и моментовъ вектора и ротора относительно точки или плоскости, а во-вторыхъ для опредѣленія угла между направленіями двухъ прямыхъ, лежащихъ въ одной плоскости.

Возвращаясь къ обозначеніямъ § 34 и къ чертежу 7, напомнимъ, что

$$\alpha=ox=\text{км}_a(oz)=\text{км}_a(\gamma),\quad \text{А}=OX=\text{км}_A(OZ)=\text{км}_A(\Gamma),$$
$$\beta=oy=\text{км}_A(oz)=\text{км}_A(\gamma),\quad \text{В}=OY=\text{км}_a(OZ)=\text{км}_a(\Gamma).$$

Такъ какъ $oz=ox+oy$, $OZ=OX+OY$ и лучи ox и oy, а также оси OX,OY взаимно перпендикуляры, то мы имѣемъ соотношенія (59) и (61). Но

$$(xoz)=\varkappa\delta+n\pi,\quad (yoz)=\theta+n\pi,$$
$$(XOZ)=\theta'+n\pi,\quad (ZOY)=\varkappa\delta'+n\pi,$$
$$T(\alpha)=T_{ox},\quad T(\beta)=T_{oy},\quad T(\gamma)=T_{oz}$$
$$T(\mathfrak{A})=T_{OX},\quad T(\mathfrak{B})=T_{OY},\quad T(\Gamma)=T_{OZ}$$

гдѣ δ и δ' разстоянія точки a до прямыхъ oz и OZ, θ и θ'— углы между тѣми же прямыми и плоскостью A, а потому

$$T(\alpha)=\pm T(\gamma)\cos\varkappa\delta,\quad T(\beta)=\pm T(\gamma)\cos\theta,$$
$$T(\mathfrak{A})=\pm T(\Gamma)\cos\theta',\quad T(\mathfrak{B})=\pm T(\Gamma)\cos\varkappa\delta'. \qquad (64)$$

Итакъ тензоръ комомента вектора (ротора) относительно точки пропорціоналенъ косинусу произведенія $\varkappa$ на разстояніе точки до луча вектора (оси ротора), а тензоръ комомента вектора (ротора) относительно плоскости пропорціоналенъ косинусу угла между лучомъ вектора (осью ротора) и плоскостью.

Такъ какъ роторъ Γ поляренъ съ векторомъ γ, то $T(\Gamma)=\varkappa T(\gamma)$, разстоянія δ,δ' и углы θ,θ' связаны между собой соотношеніями

$$\delta+\delta'=\pi/2\varkappa,\quad \theta+\theta'=\pi/2$$

и равенства (64) мы можемъ представить въ другой формѣ:

$$T(\alpha)=\pm\frac{1}{\varkappa}T(\Gamma)\sin\varkappa\delta',\quad T(\beta)=\pm\frac{1}{\varkappa}T(\Gamma)\sin\theta',$$
$$T(\mathfrak{A})=\pm\varkappa T(\gamma)\sin\theta',\quad T(\mathfrak{B})=\pm\varkappa T(\gamma)\sin\varkappa\delta', \qquad (65)$$

Вслѣдствіе полярности вектора γ и ротора Γ мы можемъ векторы α и β разсматривать какъ моменты Γ, а роторы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ какъ моменты γ относительно точки a и плоскости A. Изъ послѣднихъ равенствъ мы заключаемъ поэтому, что тензоръ момента вектора (ротора) относительно точки пропорціоналенъ синусу произведенія $\varkappa$ на разстояніе точки до луча вектора (оси ротора), а тензоръ момента вектора (ротора) относительно плоскости пропорціоналенъ синусу угла между лучомъ вектора (осью ротора) и плоскостью.

Знаки вторыхъ частей равенствъ (64) и (65) зависятъ отъ выбора направленій, которыя мы принимаемъ за положительныя для лучей и осей комоментовъ и моментовъ. Какъ

можно опредѣлить эти знаки покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Въ Эвклидовомъ пространствѣ, когда $\varkappa=0$, формулы (64) и (65) обращаются въ слѣдующія

$$T(\alpha)=T(\gamma),\ T(\beta)=T(\gamma)\cos\theta,\ T(Я)=T(\Gamma)\cos\theta',\ T(Б)=T(\Gamma)$$
$$T(\alpha)=\delta''T(\Gamma),\ T(\beta)=\infty\ ,\ T(Я)=0\ ,\ T(Б)=0 \quad (66)$$

Первый рядъ даетъ намъ тензоры комоментовъ вектора и ротора относительно точки и плоскости. Мы видимъ, что тензоръ комомента вектора (ротора) относительно точки не зависитъ отъ положенія точки и равняется тензору вектора (ротора). Это свойство комомента въ связи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что лучъ (оси) комомента $Л_1$-параллеленъ съ лучомъ вектора (осью ротора), даетъ весьма простой способъ строить въ Эвклидовомъ пространствѣ комоментъ вектора (ротора) относительно какой угодно точки: стоитъ только векторъ (роторъ), не измѣняя его длины (угла), перенести параллельно самому себѣ такъ, чтобы лучъ (ось) его прошелъ (прошла) бы черезъ данную точку.

Второй рядъ даетъ намъ тензоры моментовъ относительно точки и плоскости. Мы видимъ 1, что тензоръ момента ротора относительно точки равняется произведенію тензора ротора на разстояніе точки до оси ротора, 2, что тензоръ момента ротора относительно плоскости равняется безконечности, и въ 3, что тензоры моментовъ вектора относительно точки и плоскости всегда равняются нулю.

Всѣ формулы (66) легко могутъ быть выведены геометрически, если мы припомнимъ сказанное въ § 34_7 относительно построенія комоментовъ и моментовъ въ Эвклидовомъ пространствѣ. Мы предоставляемъ заняться этимъ выводомъ самому читателю. Замѣтимъ только, что тензоръ момента ротора относительно плоскости равняется безконечности потому, что обѣ точки момента лежатъ въ безконечно удаленной плоскости (§ 34_7) и что тензоръ момента вектора относительно плоскости равняется нулю не вслѣдствіе равенства нулю самого момента, но оттого, что осью момента служитъ безконечно удаленная прямая (§ 34_7), и обѣ плоскости момента, будучи параллельны, образуютъ уголъ равный нулю.

Выведенныя нами формулы даютъ весьма простой способъ опредѣлять уголъ между направленіями двухъ лучей ox и oy, лежащихъ въ одной плоскости, уголъ, который въ

§ 54 мы опредѣляли системой ур. (35), (37) и (39). Ибо по формулѣ (38)

$$(xoy)=\frac{1}{2i}\log(a\bar{b}ab) \qquad (38)$$

мы находимъ $(xoy)=u_0+n\pi,$

гдѣ u_0 одно изъ возможныхъ значеній угла (xoy), и для того, чтобы вполнѣ опредѣлить уголъ (xoy), остается только надлежащимъ образомъ выбрать число n. Съ этою цѣлью беремъ на лучѣ oy произвольный векторъ oy и строимъ его геометрическую проэкцію ox на лучъ ox и затѣмъ, принимая данныя направленія лучей ox и oy за положительныя для векторовъ ox и oy, опредѣляемъ T_{ox} и T_{oy} настолько, чтобы намъ былъ извѣстенъ знакъ отношенія T_{ox}/T_{oy}, а слѣдовательно по формулѣ

$$T_{ox}=T_{oy}\cos(xoy)$$

и знакъ $\cos(xoy)$. Такъ какъ знакъ косинуса мѣняется съ измѣненіемъ угла на π, то зная знакъ $\cos(xoy)$, мы получимъ одно изъ двухъ

$$\text{или } n=2m, \text{ или } n=2m+1,$$

гдѣ m какое нибудь цѣлое число, и такимъ образомъ найдемъ уголъ между направленіями лучей ox и oy. Итакъ уголъ между направленіями двухъ лучей мы всегда можемъ опредѣлить, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что алгебраическая проэкція вектора, лежащаго на одномъ изъ лучей, на направленіе другого всегда равняется произведенію тензора вектора и косинуса угла между направленіями лучей.

61. **Алгебраическіе комоменты и моменты относительно линіи.**—Имѣемъ векторъ σ, роторъ G и линію α. Приписавъ линіи α и вращенію вокругъ нея какія нибудь направленія, мы будемъ называть алгебраическими комоментами и моментами вектора σ и ротора G относительно направленій линіи α тензоры геометрическихъ комоментовъ и моментовъ σ и G относительно α, вычисленные въ предположеніи, что для нихъ положительными направленіями служатъ направленіе α и направленіе вращенія вокругъ α. Такъ какъ тензоры вектора и ротора мѣняютъ свой знакъ съ перемѣной ихъ положительнаго направленія, то алгебраическіе комоментъ σ и моментъ G относительно α будутъ измѣнять свой знакъ съ перемѣной направленія α, а алгебраическіе моментъ σ и комоментъ G—

съ перемѣной направленія вращенія вокругъ α. Если бы мы условились вращенію вокругъ α приписывать направленіе соотвѣтствующее направленію α, то эти направленія, а вмѣстѣ съ ними и знаки алгебраическихъ комоментовъ и моментовъ относительно α всѣ будутъ измѣняться одновременно. Когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраическихъ или геометрическихъ комоментахъ и моментахъ, тѣ и другіе будемъ просто называть комоментами и моментами. Алгебраическіе комоменты мотора σ и C относительно линіи α мы будемъ означать также какъ и геометрическіе:

$$\text{км}_\alpha(\sigma),\ \text{мм}_\alpha(\sigma),\ \text{км}_\alpha(\text{C}),\ \text{мм}_\alpha(\text{C}).$$

Посмотримъ, какимъ образомъ мы можемъ найти комоменты вектора и ротора относительно линіи, если намъ извѣстны уголъ и разстояніе между этой линіей и лучомъ вектора или осью ротора. Возвращаясь къ обозначеніямъ § 54 и къ чертежу 13, предположимъ, что линія β служитъ лучомъ вектора σ и осью ротора C. Приписавъ линіямъ α и β какія нибудь винтовыя направленія, означимъ черезъ θ и δ уголъ и разстояніе между направленіями α и β, соотвѣтствующіе перпендикуляру ε, черезъ R и G тензоры C и σ, соотвѣтствующіе выбранному винтовому направленію β. Чтобы опредѣлить комоментъ σ относительно α, мы должны (§ 43) сначала построить комоментъ вектора σ относительно какой нибудь точки линіи α, а затѣмъ найти проэкцію его на эту послѣднюю. Проще всего комоментъ σ опредѣлить относительно точекъ a и d: такъ какъ плоскость полярная съ точкой a, какъ находящейся на линіи ε, проходитъ черезъ линію ε' и пересѣкается съ β, лучомъ вектора σ, въ точкѣ e, то перенеся начало вектора σ въ точку e и построивъ проэкцію вектора на линію ae, получимъ векторъ σ', который и будетъ комоментомъ σ относительно a. Если то направленіе линіи ae, которое мы приписываемъ ей, опредѣляя углы и разстоянія между направленіями α и β (см. § 54), мы примемъ за положительное для вектора σ', то тензоръ вектора σ' будетъ равняться $G\cos\theta'$. Перенесемъ векторъ σ' вдоль прямой ae такъ, чтобы начало его помѣстилось въ точку a, и построимъ его проэкцію σ'' на линію α. Векторъ σ'' будетъ геометрическимъ, а тензоръ его, равный произведенію тензора σ' на $\cos\theta$:

$$G\cos\theta'\cos\theta$$

или (§ 54) $$G.\cos x\delta.\cos\theta \qquad (67)$$

алгебраическимъ комоментомъ σ относительно выбраннаго направленія α. Если бы, опредѣляя комоментъ σ относительно α, вмѣсто точки a мы воспользовались бы точкой d, то получили бы выраженіе

$$G\cos\theta_1'\cos\theta_1$$

гдѣ θ_1' уголъ между направленіемъ α и какимъ нибудь опредѣленнымъ направленіемъ линіи bd, а θ_1 уголъ между тѣмъ же направленіемъ bd и направленіемъ β. Мы знаемъ, что углы θ_1 и θ_1' могутъ различаться отъ θ и θ' только на величины кратныя отъ π. Но теперь, въ силу того, что два полученныхъ нами выраженія для комомента σ относительно линіи α должны быть равны, мы видимъ, что углы θ_1 и θ_1' должны или одновременно равняться θ и θ', или одновременно отличаться отъ нихъ на π, случаи же $\theta=\theta_1$, $\theta'=\theta_1'+\pi$ или $\theta=\theta_1+\pi$, $\theta'=\theta_1'$ невозможны. Итакъ углы и разстоянія между направленіями двухъ прямыхъ α и β не зависятъ отъ того, воспользуемся ли мы при опредѣленіи ихъ вспомогательной линіей ae или линіей bd; мы доказали такимъ образомъ оставшееся въ § 54_2 недоказаннымъ. Видоизмѣняя сказанное согласно съ принципомъ двойственности, увидимъ, что комоментъ ротора G относительно α будетъ

$$R.\cos\varkappa\delta.\cos\theta. \qquad (68)$$

Моментъ σ относительно α равняется, въ чемъ нетрудно убѣдиться, комоменту относительно α ротора G' полярнаго съ σ. Роторъ G' имѣетъ своею осью линію β', поляру β, и тензоромъ число $\varkappa G$, если за положительное направленіе для него примемъ вращеніе вокругъ β', соотвѣтствующее направленію β. Замѣчая, что уголъ и разстояніе между соотвѣтствующими направленіями β и β' равняются $\pi/2$ и $-\pi/2\varkappa$ (§ 55_5), а между α и β', по свойству сложимости,

$$\pi/2+\theta,\ -\pi/2\varkappa+\delta,$$

по формулѣ (67) мы находимъ, что моментъ вектора σ относительно α, равный комоменту G', будетъ

$$\varkappa G\cos(\pi/2+\theta).\cos(-\pi/2\varkappa+\delta),$$

или

$$-\varkappa G.\sin\varkappa\delta.\sin\theta. \qquad (69)$$

Подобными же разсужденіями убѣдимся, что моментъ G отно-

сительно α равняется

$$-\frac{R}{\varkappa}.\sin\varkappa\delta.\sin\theta. \qquad (70)$$

Пользуясь выведенными формулами, мы можемъ опредѣлить не только абсолютную величину тензоровъ комомента и момента вектора или ротора относительно точки или плоскости, что было уже сдѣлано нами въ предыдущемъ параграфѣ, но и ихъ знаки.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы хотимъ найти тензоръ комомента вектора σ (ротора G) относительно точки o. Построивъ лучъ (ось) α этого комомента и приписавъ ему какое нибудь направленіе, означимъ черезъ θ и δ уголъ и разстояніе между направленіями α и β. Такъ какъ комоментъ σ(G) относительно точки o лежитъ на линіи α, то тензоръ его будетъ равняться комоменту σ(G) относительно α и слѣдовательно опредѣлится формулой (67). Если θ и δ соотвѣтствуютъ перпендикуляру между α и β, проходящему черезъ o (одинъ изъ общихъ перпендикуляровъ къ α и β пройдемъ черезъ o [см. § 34_3]), то уголъ θ, который равняется $n\pi + 2m\pi$, гдѣ n и m цѣлыя числа, мы всегда можемъ, пользуясь способностью угла и разстоянія между направленіями двухъ прямыхъ мѣняться одновременно на π и $\pi/\varkappa$, привести къ виду $2m\pi$. Тогда разстояніе δ опредѣлится до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/\varkappa$ и формула 67 (68) приметъ видъ

$$G\cos\varkappa\delta \qquad (R\cos\varkappa\delta) \qquad (71)$$

Если же θ и δ соотвѣтствуютъ тому общему перпендикуляру къ α и β, который проходитъ черезъ точку ихъ пересѣченія, то разстояніе δ, измѣняя одновременно θ и δ на π и $\pi/\varkappa$, мы можемъ привести къ виду $2m\pi/\varkappa$. Тогда θ опредѣлится до величинъ кратныхъ отъ 2π и формула 67 (68) приметъ видъ

$$G\cos\theta \qquad (R\cos\theta). \qquad (72)$$

Такія же формулы (71) и (72) мы получимъ и для тензора комомента вектора σ (ротора G) относительно плоскости O.

Предположимъ, во-вторыхъ, что мы хотимъ опредѣлить моментъ вектора σ (ротора G) относительно точки o. Построивъ ось (лучъ) α момента σ(G) относительно o, припишемъ ей какое нибудь направленіе и означимъ черезъ θ и δ уголъ и разстояніе между направленіями α и β. Такъ какъ моментъ σ(G)

относительно o имѣетъ α своею осью (своимъ лучомъ), то тензоръ момента будетъ равняться моменту $\sigma(C)$ относительно α и опредѣлится формулой 69 (70). Если θ и δ соотвѣтствуютъ тому общему къ α и β перпендикуляру, который проходитъ черезъ o (одинъ перпендикуляръ непремѣнно пройдетъ черезъ o) то $\theta = \pi/2 + m\pi$ и, пользуясь свойствомъ угла и разстоянія между двумя направленіями измѣняться одновременно на π и $\pi/\varkappa$, мы можемъ привести θ къ виду $-\pi/2 + 2m\pi$; тогда разстояніе δ опредѣлится до величинъ кратныхъ отъ $2\pi/\varkappa$, и формула 69 (70) приметъ видъ

$$\frac{R}{\varkappa}\sin\varkappa\delta \qquad (G\varkappa\sin\nu\delta) \qquad (73)$$

Если же θ и δ соотвѣтствуютъ тому общему къ α и β перпендикуляру, который черезъ точку o не проходитъ, то разстояніе δ, измѣняя одновременно θ и δ на π и $\pi/\varkappa$, мы можемъ привести къ вику—$\pi/2\varkappa + 2m\pi/\varkappa$; тогда θ опредѣлится до величинъ кратныхъ отъ 2π и формула 69 (70) приметъ видъ

$$\frac{R}{\varkappa}\sin\theta \qquad (G\varkappa\sin\theta) \qquad (74)$$

Такія же формулы (73) и (74) мы получимъ и для тензора момента вектора σ (ротора C) относительно плоскости O.

62. **Алгебраическая проэкція мотора на линію.**— Имѣемъ моторъ $\varrho(\sigma,C)$ и ось α. Приписавъ оси α какое нибудь винтовое направленіе и принявъ его за положительное для геометрической проэкціи мотора на линію α, мы будемъ называть тензоръ этой послѣдней, соотвѣтствующій направленію α, алгебраической проэкціей мотора ϱ на направленіе α. Очевидно, что алгебраическая проэкція мѣняетъ свой знакъ съ перемѣной направленія α. Когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраической или геометрической проэкціи, ту и другую мы будемъ просто называть проэкціей. Алгебраическую проэкцію мотора ϱ на α будемъ означать также какъ и геометрическую:

$$\text{пр}_\alpha(\varrho).$$

Относительно алгебраической проэкціи мы докажемъ прежде всего слѣдующую весьма важную теорему, которая уже одна была бы способна вслѣдствіе аналогіи равенства, ее выражаю-

щаго, съ хорошо извѣстнымъ основнымъ равенствомъ теоріи векторовъ, формулированнымъ нами въ § 60 словами, оправдать введеніе въ теорію векторовъ понятій о тензорѣ и комплексномъ углѣ.

Теорема I.—*Алгебраическая проэкція мотора на направленіе луча равняется произведенію тензора мотора на косинусъ комплекснаго угла между направленіемъ оси мотора, соотвѣтствующимъ этому тензору, и направленіемъ луча проэкціи.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть σ и $\mathfrak{G}$ векторъ и роторъ мотора ϱ для точки приведенія, находящейся на оси β мотора. Мы знаемъ, что элементами проэкціи ϱ служатъ (см. § 44):

$$\text{векторъ} \qquad \sigma' = \text{км}_\alpha(\sigma) + \text{мм}_\alpha(\mathfrak{G}),$$
$$\text{роторъ} \qquad \mathfrak{G}' = \text{мм}_\alpha(\sigma) + \text{км}_\alpha(\mathfrak{G}).$$

Такъ какъ векторы $\text{км}_\alpha(\sigma)$, $\text{мм}_\alpha(\mathfrak{G})$ имѣютъ линію α своимъ лучомъ, а роторы $\text{мм}_\alpha(\sigma)$ и $\text{км}_\alpha(\mathfrak{G})$—своею осью, то тензоръ σ' будетъ равняться суммѣ тензоровъ $\text{км}_\alpha(\sigma)$ и $\text{мм}_\alpha(\mathfrak{G})$, а тензоръ $\mathfrak{G}'$—суммѣ тензоровъ $\text{мм}_\alpha(\sigma)$ и $\text{км}_\alpha(\mathfrak{G})$ (§ 60_1). Но тензоры $\text{км}_\alpha(\sigma)$, $\text{км}_\alpha(\mathfrak{G})$, $\text{мм}_\alpha(\sigma)$, $\text{мм}_\alpha(\mathfrak{G})$ представляютъ собой алгебраическіе комоменты и моменты σ и $\mathfrak{G}$ относительно α, а потому, означая эти послѣдніе согласно сдѣланному въ § 61 условію также какъ и соотвѣтствующіе имъ геометрическіе комоменты и моменты, мы имѣемъ

$$\mathrm{T}(\sigma') = \text{км}_\alpha(\sigma) + \text{мм}_\alpha(\mathfrak{G}),$$
$$\mathrm{T}(\mathfrak{G}') = \text{мм}_\alpha(\sigma) + \text{км}_\alpha(\mathfrak{G}),$$

или

$$\mathrm{T}(\sigma') = G\cos\theta\cos\varkappa\delta - \frac{R}{\varkappa}\sin\theta\sin\varkappa\delta,$$
$$\mathrm{T}(\mathfrak{G}') = R\cos\theta\cos\varkappa\delta - \varkappa G\sin\theta\sin\varkappa\delta,$$

гдѣ θ и δ уголъ и разстояніе между направленіями α и β, а R и G тензоры $\mathfrak{G}$ и σ, соотвѣтствующіе выбранному направленію β. Зная $\mathrm{T}(\sigma')$ и $\mathrm{T}(\mathfrak{G}')$ и замѣчая, что векторъ σ' и роторъ $\mathfrak{G}'$ лежатъ на линіи α, которая служитъ осью геометрической проэкціи ϱ на α, находимъ, что алгебраическая

$$\text{пр}_\alpha(\varrho) = \mathrm{T}(\mathfrak{G}') + \omega\mathrm{T}(\sigma') = R\cos\theta\cos\varkappa\delta - \varkappa G\sin\theta\sin\varkappa\delta$$
$$+ \omega\left(G\cos\theta\cos\varkappa\delta - \frac{R}{\varkappa}\sin\theta\sin\varkappa\delta\right),$$

или

$$\text{пр}_\alpha(\varrho) = (R + \omega G)\cos(\theta + \omega\delta),$$

или, наконецъ, полагая

$$H=R+\omega G,\ \vartheta=\theta+\omega\delta$$
$$\text{пр}_\alpha(\varrho)=H.\cos\vartheta.$$

Это равенство и выражаетъ собой теорему, ибо $\vartheta=\theta+\omega\delta$ есть комплексный уголъ между направленіями α и β, а $H=R+\omega G$—тензоръ ϱ, соотвѣтствующій направленію β. Итакъ теорема доказана.

Если два мотора $\gamma_1(\alpha_1,\mathfrak{Я}_1)$ и $\gamma_2(\alpha_2,\mathfrak{Я}_2)$ имѣютъ общую ось α, то послѣдняя служитъ также осью и для ихъ суммы. Это становится очевиднымъ, если мы предположимъ, что точка приведенія находится на общей оси; ибо тогда, по самому опредѣленію оси, векторы α_1 и α_2, а вмѣстѣ съ ними и векторъ $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$ мотора $\gamma_3=\gamma_1+\gamma_2$, будутъ лежать на оси α, и та же линія α будетъ служить осью и для роторовъ $\mathfrak{Я}_1$ и $\mathfrak{Я}_2$, а также и для ротора $\mathfrak{Я}_3=\mathfrak{Я}_1+\mathfrak{Я}_2$ мотора γ_3. Принимая одно и то же винтовое направленіе общей всѣмъ моторамъ $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ оси α за положительное для всѣхъ трехъ, мы будемъ имѣть

$$\text{T}(\alpha_3)=\text{T}(\alpha_1)+\text{T}(\alpha_2),\ \text{T}(\mathfrak{Я}_3)=\text{T}(\mathfrak{Я}_1)+(\mathfrak{Я}_2),$$

откуда

$$\text{T}(\mathfrak{Я}_3)+\omega\text{T}(\alpha_3)=[\text{T}(\mathfrak{Я}_1)+\text{T}(\mathfrak{Я}_2)]+\omega[\text{T}(\alpha_1)+\text{T}(\alpha_2)]$$

или

$$\text{T}(\gamma_3)=\text{T}(\gamma_1)+\text{T}(\gamma_2),$$

т. е. тензоръ суммы и тензоры слагаемыхъ моторовъ, соотвѣтствующіе одному и тому же направленію общей имъ всѣмъ оси, связаны между собой соотношеніемъ: тензоръ суммы равняется суммѣ тензоровъ слагаемыхъ.

Предположимъ теперь, что $\varrho=\varrho_1+\varrho_2$. Такъ какъ $\text{пр}_\alpha(\varrho)$, $\text{пр}_\alpha(\varrho_1)$, $\text{пр}_\alpha(\varrho_2)$ всѣ имѣютъ линію α своею осью, и (теорема § 44)

$$\text{пр}_\alpha(\varrho)=\text{пр}_\alpha(\varrho_1)+\text{пр}_\alpha(\varrho_2),\qquad(75)$$

то по доказанному сейчасъ

$$\text{T}[\text{пр}_\alpha(\varrho)]=\text{T}[\text{пр}_\alpha(\varrho_1)]+\text{T}[\text{пр}_\alpha(\varrho_2)].$$

Но тензоры, входящіе въ послѣднее равенство, представляютъ собой алгебраическія проэкціи моторовъ $\varrho,\varrho_1,\varrho_2$ на направленіе α, а потому оно можетъ быть снова написано

въ видѣ (75), если подъ $\text{пр}_\alpha(\underset{\sim}{\varrho})$, $\text{пр}_\alpha(\underset{\sim}{\varrho}_1)$, $\text{пр}_\alpha(\underset{\sim}{\varrho}_2)$ будемъ подразумѣвать уже не геометрическія, а алгебраическія проэкціи моторовъ $\underset{\sim}{\varrho},\underset{\sim}{\varrho}_1,\underset{\sim}{\varrho}_2$ на направленіе α. Итакъ мы доказали слѣдующую теорему.

Теорема II.—*Проэкція суммы равняется суммѣ проэкцій.*

Эта теорема и теорема § 44, выражающіяся однимъ и тѣмъ же равенствомъ (75) и тожественныя по внѣшнему виду, тѣмъ не менѣе существенно различны, ибо въ первой рѣчь идетъ объ проэкціяхъ алгебраическихъ, а во второй о проэкціяхъ геометрическихъ.

63. **Составляющія и проэкціи мотора на трехъ осяхъ.**— Теоремы, доказанныя нами въ предыдущемъ параграфѣ, даютъ возможность обратиться къ изложенію теоріи комплексныхъ координатъ мотора.

Возьмемъ при прямыя x,y,z какъ угодно расположенныя въ пространствѣ (онѣ могутъ пересѣкаться и не пересѣкаться) и, приписавъ имъ какія нибудь винтовыя направленія, положимъ для краткости

$$\lambda = \lambda_I + \omega\lambda_{II} = \cos(yz),$$
$$\mu = \mu_I + \omega\mu_{II} = \cos(zx),$$
$$\nu = \nu_I + \omega\nu_{II} = \cos(xy),$$

гдѣ (yz), (zx), (xy) суть комплексные углы между направленіями осей y и z, z и x, x и y. Возьмемъ затѣмъ три комплексныхъ числа a,b,c и построимъ три мотора, α,β,γ, для которыхъ x,y,z служили бы осями, а числа a,b,c тензорами, соотвѣтствующими выбраннымъ направленіямъ x,y,z. Такъ какъ по закону коммутативности и ассоціативности сложенія (§ 44) сумма моторовъ не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, то три мотора α,β,γ опредѣляютъ одинъ и только одинъ моторъ

$$\underset{\sim}{\varrho} = \alpha + \beta + \gamma,$$

и каждый изъ моторовъ α,β,γ играетъ по отношенію къ мотору $\underset{\sim}{\varrho}$ одинаковую роль; мы будемъ называть α,β,γ геометрическими, а числа a,b,c алгебраическими составляющими мотора $\underset{\sim}{\varrho}$ по осямъ x,y,z. Когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ геометрическихъ или алгебраическихъ составляющихъ, тѣ и другія безразлично будемъ называть просто составляющими мотора.

Теорема I.—*По даннымъ составляющимъ мотора* ϱ *по осямъ* x,y,z *можно найти одну и только одну систему проэкцій* ϱ *на оси* x,y,z. *Обратно по даннымъ проэкціямъ мотора* ϱ *на оси* x,y,z *можно найти одну и только одну систему составляющихъ* ϱ *по осямъ* x,y,z, *если опредѣлитель*

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu \\ \nu & 1 & \lambda \\ \mu & \lambda & 1 \end{vmatrix}$$

не равенъ числу, изображаемому какой либо точкой инваріантной (*въ смыслѣ* § 11) *прямой.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$a=A+\omega P,\ b=B+\omega Q,\ c=C+\omega R$$

составляющія и

$$x=X+\omega L,\ y=Y+\omega M,\ z=Z+\omega N$$

проэкціи мотора ϱ на оси x,y,z. Такъ какъ

$$\varrho=\alpha+\beta+\gamma,$$

гдѣ α,β,γ суть геометрическія составляющія мотора ϱ по осямъ, то проэктируя ϱ на ось x и пользуясь теоремами предыдущаго параграфа, мы получаемъ первое изъ уравненій

$$\begin{aligned} x&=a\ +b\nu+c\mu, \\ y&=a\nu+b\ +c\lambda, \\ z&=a\mu+b\lambda+c, \end{aligned} \qquad (76)$$

связывающихъ проэкціи мотора ϱ съ его составляющими. Остальныя два ур. получаемъ подобнымъ же образомъ, проэктируя моторъ ϱ на оси y и z соотвѣтственно. Изъ этихъ ур. видно, что по даннымъ составляющимъ a,b,c проэкціи мотора на оси x,y,z вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляются, каковы бы ни были λ,μ,ν.

Чтобы обратно по даннымъ проэкціямъ найти составляющія a,b,c, мы должны ур. (76) рѣшить относительно этихъ послѣднихъ; получимъ

$$\begin{aligned} a&=(\Delta_{11}x+\Delta_{21}y+\Delta_{31}z):\Delta \\ b&=(\Delta_{12}x+\Delta_{22}y+\Delta_{32}z):\Delta \\ c&=(\Delta_{13}x+\Delta_{23}y+\Delta_{33}z):\Delta \end{aligned} \qquad (77)$$

гдѣ Δ_{11}, и т. д. суть миноры второго порядка опредѣлителя Δ. Такъ какъ въ знаменателѣ выраженій a,b,c черезъ x,y,z входитъ опредѣлитель Δ, то при произвольно заданныхъ x,y,z мы будемъ имѣть одну вполнѣ опредѣленную систему конечныхъ значеній для a,b,c только въ томъ случаѣ, когда опредѣлитель Δ не равенъ числу, изображаемому точкой инваріантной (въ смыслѣ § 11) прямой линіи. Такимъ образомъ теорема доказана.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда оси x,y,z взаимно перпендикулярны и проходятъ черезъ одну и ту же точку o (начало координатъ) или всѣ лежатъ въ одной и той же плоскости O (начальная плоскость координатъ),

$$\lambda=\mu=\nu=0,\ \Delta=1$$

и проэкціи x,y,z мотора ϱ становятся равными его составляющимъ a,b,c.

Теорема II.—*Можно построить одинъ и только одинъ моторъ, составляющія котораго по осямъ x,y,z равняются тремъ произвольно заданнымъ числамъ. Обратно для даннаго мотора существуетъ одна и только одна система трехъ составляющихъ по осямъ x,y,z, если опредѣлитель Δ не равенъ числу, изображаемому точкой инваріантной прямой.*

Построивъ по алгебраическимъ составляющимъ a,b,c мотора ϱ геометрическія α,β,γ, стоитъ только сложить послѣднія, чтобы получить моторъ ϱ. Такъ какъ сумма моторовъ α,β,γ можетъ быть только одна, то первая часть теоремы очевидна.

Чтобы обратно для даннаго мотора найти его составляющія a,b,c по осямъ x,y,z, мы опредѣлимъ сначала его проэкціи на эти оси. Взявъ точку приведенія мотора ϱ на оси x, строимъ его векторъ σ и роторъ C; проэктируя затѣмъ σ и C на ось x и означая проэкцію C черезъ X и проэкцію σ черезъ L, находимъ проэкцію мотора ϱ на x:

$$x=X+\omega L.$$

Также опредѣляемъ, послѣдовательно беря точки приведенія на осяхъ y и z, проэкціи y и z мотора ϱ на оси y и z. Зная проэкціи по теоремѣ I найдемъ и составляющія, ибо по предположенію опредѣлитель Δ не равенъ числу, изображаемому точкой, находящейся на какой нибудь изъ инваріантныхъ прямыхъ.

Слѣдствіе I.—Эта теорема показываетъ намъ, что всякій моторъ ϱ можно задать его тремя алгебраическими составляющими по осямъ, если опредѣлитель Δ удовлетворяетъ условію, указанному въ теоремѣ. Мы можемъ, поэтому, назвать алгебраическія составляющія комплексными координатами или просто координатами мотора.

Слѣдствіе II.—Если два мотора равны, то равны ихъ соотвѣтствующія составляющія по осямъ, когда опредѣлитель Δ удовлетворяетъ условію теоремы. Обратно, если у двухъ моторовъ равны ихъ соотвѣтствующія составляющія, то и моторы будутъ равны.

Слѣдствіе III.—Для того, чтобы моторъ ϱ_3 равнялся суммѣ моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 необходимо и достаточно соблюденіе слѣдующихъ условій

$$a_3=a_1+a_2,\ b_3=b_1+b_2,\ c_3=c_1+c_2, \tag{78}$$

гдѣ a_1,b_1,c_1; a_2,b_2,c_2; a_3,b_3,c_3 означаютъ алгебраическія составляющія моторовъ $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3$ по осямъ x,y,z. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$; $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$; $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ геометрическія составляющія по осямъ моторовъ $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3$. Допуская, что имѣютъ мѣсто соотношенія (78), имѣемъ

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=\beta_1+\beta_2,\ \gamma_3=\gamma_1+\gamma_2.$$

Складывая эти равенства и замѣчая, что

$$\varrho_1=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\ \varrho_2+\alpha_2+\beta_2+\gamma_2,\ \varrho_3=\alpha_3+\beta_3+\gamma_3,$$

находимъ $\varrho_3=\varrho_1+\varrho_2$. Предположимъ обратно, что $\varrho_3=\varrho_1+\varrho_2$. Моторъ ϱ, составляющія котораго по осямъ суть a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, какъ сейчасъ было показано, равнятся суммѣ $\varrho_1+\varrho_2$; поэтому $\varrho=\varrho_3$ и (слѣдствіе II) имѣютъ мѣсто равенства (78).

Теорема III.—*Если опредѣлитель Δ не равенъ числу, изображаемому какой либо точкой инваріантной прямой, то всегда можно построить одинъ и только одинъ моторъ, проэкціи котораго на оси x,y,z равняются тремъ произвольно заданнымъ числамъ x,y,z. Обратно для всякаго мотора существуетъ одна и только одна система трехъ проэкцій x,y,z на координатныя оси.*

Въ самомъ дѣлѣ, если опредѣлитель Δ не равенъ числу, изображаемому какой либо точкой инваріантной прямой, то

по тремъ проэкціямъ мотора на оси x,y,z мы можемъ найти сначала по ур. (77) его алгебраическія, а потомъ и геометрическія составляющія. Сложивъ послѣднія, получимъ и самый моторъ. Вторая половина теоремы прямо вытекаетъ изъ опредѣленія проэкціи мотора на ось: проэкція мотора на ось можетъ быть только одна.

Слѣдствіе I.—Изъ этой теоремы видно, что всякій моторъ можно задать его тремя проэкціями на три оси x,y,z, если опредѣлитель Δ удовлетворяетъ указанному въ теоремѣ условію. Мы можемъ, поэтому, назвать алгебраическія проэкціи мотора на оси x,y,z комплексными координатами или просто координатами мотора.

Слѣдствіе II.—Если два мотора равны, то равны и ихъ проэкціи на оси x,y,z. Обратно, если у двухъ моторовъ равны ихъ проэкціи, то и сами моторы равны.

Слѣдствіе III.—Для того, чтобы моторъ ϱ_3 равнялся суммѣ моторовъ ϱ_1 и ϱ_2, необходимо и достаточно соблюденіе слѣдующихъ условій

$$x_3=x_1+x_2,\ y_3=y_1+y_3,\ z_3=z_1+z_2 \qquad (79)$$

гдѣ x_1,y_1,z_1; x_2,y_2,z_2; x_3,y_3,z_3 означаютъ проэкціи моторовъ соотвѣтственно на оси x,y,z. Въ самомъ дѣлѣ, если $\varrho_3=\varrho_1+\varrho_2$, то по теоремѣ второй предыдущаго параграфа будутъ имѣть мѣсто соотношенія (79). Обратно, если имѣютъ мѣсто соотношенія (79), то проэкціи мотора $\varrho=\varrho_1+\varrho_2$: x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2 равны проэкціямъ мотора ϱ_3; слѣдовательно $\varrho_3=\varrho=\varrho_1+\varrho_2$.

64. **Тензоръ мотора.**—При доказательствѣ теоремъ предыдущаго параграфа мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно того, имѣетъ ли моторъ ϱ оси или нѣтъ. Допустимъ теперь, что моторъ ϱ имѣетъ оси и обратимся къ рѣшенію слѣдующихъ двухъ задачъ:

1. Зная тензоръ мотора и комплексные углы, которые его ось образуетъ съ осями x,y,z, найти его проэкціи и составляющія на осяхъ.

2. Зная проэкціи или составляющія мотора на осяхъ x,y,z, найти тензоръ мотора и комплексные углы, образуемые его осью съ осями координатъ.

Означимъ черезъ $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ комплексные углы, которые направленія осей x,y,z образуютъ съ направленіемъ одной изъ осей мотора, черезъ H соотвѣтствующій этой послѣдней тензоръ и черезъ x,y,z проэкціи мотора на координатныя оси. По теоремѣ I § 62 имѣемъ слѣдующія соотношенія между

$x,y,z,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3,H$:

$$x=H\cos\vartheta_1,\quad y=H\cos\vartheta_2,\quad z=H\cos\vartheta_3. \tag{80}$$

Эти соотношенія вполнѣ рѣшаютъ первую задачу, ибо, вычисливъ проэкціи, по формуламъ (77) найдемъ и составляющія мотора по осямъ x,y,z. Обращаясь къ рѣшенію второй задачи, выведемъ сначала формулу для тензора мотора.

Теорема.—*Квадратъ тензора мотора равняется суммѣ произведеній проэкцій мотора на соотвѣтствующія его составляющія*:

$$H^2=ax+by+cz. \tag{81}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если α,β,γ суть геометрическія составляющія мотора $\dot{o}$, то $\dot{o}=\alpha+\beta+\gamma$. Проэктируя $\dot{o}$ и его геометрическія составляющія на ось $\dot{o}$ и замѣчая, что проэкція мотора $\dot{o}$ на свою ось равняется тензору его, получаемъ по теоремамъ § 62

$$H=a\cos\vartheta_1+b\cos\vartheta_2+c\cos\vartheta_3.$$

Умноживъ это равенство на H и принимая во вниманіе (80), получаемъ искомую формулу (81).

Слѣдствіе I.—Если въ формулѣ (81) введемъ вмѣсто проэкцій мотора $\dot{o}$ его составляющія a,b,c, то получимъ выраженіе H^2 только черезъ составляющія

$$H^2=a^2+b^2+c^2+2\lambda bc+2\mu ca+2\nu ab. \tag{82}$$

Слѣдствіе II.—Если въ формулѣ (81) введемъ вмѣсто составляющихъ мотора $\dot{o}$ его проэкціи x,y,z, то получимъ выраженіе H^2 только черезъ проэкціи

$$H^2=-\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & x \\ \nu & 1 & \lambda & y \\ \mu & \lambda & 1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} : \Delta \tag{83}$$

или
$$H^2=(\Delta_{11}x^2+\Delta_{22}y^2+\Delta_{33}z^2+ \tag{84}$$
$$+2\Delta_{23}yz+2\Delta_{31}zx+2\Delta_{12}xy) : \Delta.$$

Такимъ образомъ выраженія квадрата тензора мотора черезъ проэкціи и составляющія представляютъ собой двѣ союзныя формы.

Слѣдствіе III.—Если выраженія (80) проэкцій x,y,z мы внесемъ въ (83), то получимъ слѣдующее соотношеніе между косинусами комплексныхъ угловъ, которые ось мотора образуетъ съ координатными осями:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & \cos\vartheta_1 \\ \nu & 1 & \lambda & \cos\vartheta_2 \\ \mu & \lambda & 1 & \cos\vartheta_3 \\ \cos\vartheta_1 & \cos\vartheta_2 & \cos\vartheta_3 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (85)$$

Слѣдствіе IV.—Когда оси x,y,z взаимно перпендикулярны и проходятъ черезъ одну и ту же точку o или всѣ лежатъ въ одной плоскости O, то $\lambda=\mu=\nu=0$, $\Delta=1$, проэкціи мотора равны его соотвѣтствующимъ составляющимъ и формулы (81) и (85) принимаютъ видъ

$$H^2=x^2+y^2+z^2, \qquad (81')$$

$$\cos^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_2+\cos^2\vartheta_3=1. \qquad (85')$$

Выведенныхъ формулъ вполнѣ достаточно для рѣшенія второй задачи. Зная проэкціи или составляющія мотора по одной изъ формулъ (81), (82) или (83) мы опредѣлимъ тензоръ мотора; внеся затѣмъ найденное значеніе H въ ур. (80) найдемъ и углы $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$. Ниже мы подробно остановимся на рѣшеніи этой задачи. Здѣсь замѣтимъ только, что всѣ рѣшенія ур. (80) и (81) относительно H и $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ относятся къ одному и тому же мотору. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ черезъ H_1 одинъ изъ корней ур. (81), черезъ $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ комплексные углы, удовлетворяющія ур. (80), когда вмѣсто H мы подставимъ H_1, легко видѣть, что ур. (80) и (81) имѣютъ слѣдующія 4 системы рѣшеній:

$$\begin{array}{cccc} H_1 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ -H_1 & \vartheta_1+\pi & \vartheta_2+\pi & \vartheta_3+\pi \\ \frac{\omega}{\varkappa}H_1 & \vartheta_1+\pi\eta & \vartheta_2+\pi\eta & \vartheta_3+\pi\eta \\ -\frac{\omega}{\varkappa}H_1 & \vartheta_1+\pi\xi & \vartheta_2+\pi\xi & \vartheta_3+\pi\xi. \end{array}$$

Если ε есть ось, образующая съ осями координатъ комплексные углы $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$, то первое рѣшеніе опредѣлитъ моторъ ϱ съ осью ε и тензоромъ H_1, второе—моторъ съ осью отличающейся отъ ε только направленіемъ и съ тензоромъ—H_1,

третье—моторъ съ осью ε', полярной съ ε и имѣющей соотвѣтствующее ε направленіе и съ тензоромъ $\omega H_1/\varkappa$, и, наконецъ, четвертое — моторъ съ осью различающейся отъ ε' только направленіемъ и съ тензоромъ—$H\omega/\varkappa$. Но мы знаемъ (§ 52), что всѣ эти четыре мотора тожественны; ур. (80) и (81) опредѣляютъ такимъ образомъ тензоры и оси одного и того же мотора.

65. **Геометрическое произведеніе двухъ моторовъ.** — Геометрическимъ произведеніемъ двухъ моторовъ называется произведеніе тензоровъ ихъ на косинусъ комплекснаго угла между направленіями осей соотвѣтствующими этимъ тензоромъ. Такимъ образомъ, означая черезъ H и H' тензоры моторовъ ϱ и ϱ', черезъ ϑ комплексный уголъ между направленіями осей, соотвѣтствующими этимъ тензорамъ, и черезъ $\overline{\varrho\varrho'}$ геометрическое произведеніе моторовъ ϱ и ϱ', мы имѣемъ

$$\overline{\varrho\varrho'}=HH'\cos\vartheta. \tag{86}$$

Изъ теоремы I § 62 видно, что геометрическое произведеніе двухъ моторовъ равняется произведенію тензора одного на алгебраическую проэкцію другого на ось перваго.

Теорема.—*Геометрическое произведеніе двухъ моторовъ равняется суммѣ произведеній составляющихъ одного мотора и соотвѣтствующихъ проэкцій другого*:

$$\overline{\varrho\varrho'}=xa'+yb'+zc', \tag{87}$$

гдѣ x,y,z суть проэкціи ϱ, а a',b',c' — составляющія ϱ' по осямъ x,y,z.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ моторъ ϱ' равняется суммѣ своихъ геометрическихъ составляющихъ по осямъ, то проэктируя ϱ' на ось мотора ϱ по теоремамъ § 62, находимъ

$$H'\cos\vartheta=a'\cos\vartheta_1+b'\cos\vartheta_2+c'\cos\vartheta_3$$

гдѣ $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ комплексные углы, которые ось мотора ϱ образуетъ съ осями координатъ. Умноживъ это ур. на H и пользуясь формулами (80), получаемъ весьма важное равенство

$$HH'\cos\vartheta=xa'+yb'+zc',$$

которое и доказываетъ теорему. Очевидно, что въ томъ частномъ случаѣ, когда $\varrho=\varrho'$ эта теорема обращается въ теорему предыдущаго параграфа.

Слѣдствіе I. — Если во вторую часть равенства (87) введемъ вмѣсто x,y,z ихъ выраженія черезъ составляющія a,b,c мотора ϱ, то получимъ

$$\overline{\varrho\varrho'}=aa'+bb'+cc'+ \\ +\lambda(bc'+b'c)+\mu(ca'+c'a)+\nu(ab'+a'b)— \tag{88}$$

выраженіе геометрическаго произведенія двухъ моторовъ черезъ ихъ составляющія.

Слѣдствіе II.—Если во вторую часть формулы (87) введемъ вмѣсто a',b',c' проэкціи x',y',z' мотора ϱ', то получимъ

$$\overline{\varrho\varrho'}=-\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & x \\ \nu & 1 & \lambda & y \\ \mu & \lambda & 1 & z \\ x' & y' & z' & 0 \end{vmatrix}:\Delta \tag{89}$$

или

$$\overline{\varrho\varrho'}=[\Delta_{11}xx'+\Delta_{22}yy'+\Delta_{33}zz'+\Delta_{23}(yz'+y'z)+\Delta_{31}(zx'+z'x)+ \\ +\Delta_{12}(xy'+x'y)]:\Delta. \tag{90}$$

выраженіе геометрическаго произведенія моторовъ черезъ ихъ проэкціи.

Слѣдствіе III. — Формулы для геометрическаго произведенія даютъ возможность вычислить комплексный уголъ между двумя прямыми — осями двухъ моторовъ, заданныхъ ихъ проэкціями или составляющими по осямъ x,y,z. Ибо, вычисливъ по одной изъ формулъ (87), (88) или (89) геометрическое произведеніе моторовъ ϱ и ϱ', и затѣмъ по одной изъ формулъ (81), (82) или (84) тензоры H и H', мы находимъ $\cos\vartheta$ и уголъ ϑ. Такъ, напримѣръ, если воспользуемся (81) и (87), то получимъ

$$\cos\vartheta=\frac{xa'+yb'+zc'}{\sqrt{xa+yb+zc}\,\sqrt{x'a'+y'b'+z'c'}}. \tag{91}$$

Если съ тою же цѣлью употребимъ формулу (89), внеся въ нее вмѣсто x,y,z ихъ выраженія (80) и вмѣсто x',y',z' ихъ выраженія:

$$x'=H'\cos\vartheta_1',\ y'=H\cos\vartheta_2',\ z'=H'\cos\vartheta_3',$$

гдѣ $\vartheta_1',\vartheta_2',\vartheta_3'$ комплексные углы, которые ось ϱ' образуетъ съ осями координатъ, то получимъ

$$\cos\vartheta=\left|\begin{array}{cccc} 1 & \nu & \mu & \cos\vartheta_1 \\ \nu & 1 & \lambda & \cos\vartheta_2 \\ \mu & \lambda & 1 & \cos\vartheta_3 \\ \cos\vartheta_1' & \cos\vartheta_2' & \cos\vartheta_3' & 0 \end{array}\right| :\Delta \qquad (92)$$

—выраженіе косинуса комплекснаго угла между двумя лучами черезъ комплексные углы, которые эти лучи образуютъ съ осями координатъ.

Слѣдствіе IV.—Когда оси координатъ взаимно-перпендикулярны и проходятъ черезъ одну и ту же точку или всѣ лежатъ въ одной плоскости, то $\lambda=\mu=\nu=0$, $\Delta=1$ и формулы (87), (91) и (92) принимаютъ видъ

$$\overline{QQ'}=xx'+yy'+zz', \qquad (93)$$

$$\cos\vartheta=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad (94)$$

$$\cos\vartheta=\cos\vartheta_1\cos\vartheta_1'+\cos\vartheta_2\cos\vartheta_2'+\cos\vartheta_3\cos\vartheta_3'. \qquad (95)$$

66. **Преобразованіе координатъ.** — Возьмемъ какую нибудь новую систему трехъ осей x',y',z', отличную отъ системы осей x,y,z и, полагая для краткости

$$\lambda'=\cos(y'z'),\ \mu'=\cos(z'x'),\ \nu'=\cos(x'y'),$$

гдѣ $(y'z'),(z'x'),(x'y')$ суть комплексные углы между выбранными направленіями осей y' и z', z' и x', x' и y', предположимъ, что опредѣлитель

$$\Delta'=\left|\begin{array}{ccc} 1 & \nu' & \mu' \\ \nu' & 1 & \lambda' \\ \mu' & \lambda' & 1 \end{array}\right|$$

подобно тому какъ и опредѣлитель Δ не равенъ числу изображаемому точкой, лежащей на какой либо изъ инваріантныхъ прямыхъ. Вслѣдствіе этого предположенія моторъ Q мы также хорошо можемъ задать его проэкціями x',y',z' на оси x',y',z' или составляющими a',b',c' по осямъ x',y',z', какъ и проэкціями x,y,z или составляющими a,b,c относительно старыхъ осей. Поэтому ясно, что должны существовать соотношенія между новыми и старыми проэкціями и составляющими мотора. Найдемъ эти соотношенія.

Пусть положеніе новыхъ осей относительно старыхъ опредѣляется комплексными углами между новыми и старыми осями, косинусы которыхъ даются въ слѣдующей таблицѣ:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x' & l_1=\lambda_1+\omega\xi_1 & m_1=\mu_1+\omega\eta_1 & n_1=\nu_1+\omega\zeta_1 \\ y' & l_2=\lambda_2+\omega\xi_2 & m_2=\mu_2+\omega\eta_2 & n_2=\nu_2+\omega\zeta_2 \\ z' & l_3=\lambda_3+\omega\xi_3 & m_3=\mu_3+\omega\eta_3 & n_3=\nu_3+\omega\zeta_3. \end{array} \qquad (96)$$

Разсматривая моторъ ϱ какъ сумму его составляющихъ по осямъ x,y,z и проэктируя его на ось x', помощью теоремъ § 62 получаемъ первое изъ равенствъ

$$\begin{aligned} x'&=l_1a+m_1b+n_1c, \\ y'&=l_2a+m_2b+n_2c, \\ z'&=l_3a+m_3b+n_3c. \end{aligned} \qquad (97)$$

Другія два равенства получаемъ, проэктируя моторъ на оси y' и z'. Подобнымъ же образомъ, разсматривая ϱ какъ сумму его составляющихъ по осямъ x',y',z' и проэктируя его на оси x,y,z, находимъ

$$\begin{aligned} x&= l_1a'+ l_2b'+ l_3c', \\ y&=m_1a'+m_2b'+m_2c', \\ z&= n_1a'+ n_2b'+n_3c'. \end{aligned} \qquad (98)$$

Припоминая теперь, что проэкціи мотора выражаются линейными и однородными функціями черезъ его составляющія по координатнымъ осямъ, мы легко докажемъ, что проэкціи x',y',z' могутъ быть выражены линейными и однородными функціями отъ x,y,z, а a',b',c' — линейными и однородными функціями отъ a,b,c.

Комплексныя числа,

$$l_1,m_1,n_1;\ l_2,m_2,n_2;\ l_3,m_3,n_3;\ \lambda,\mu,\nu;\ \lambda',\mu',\nu', \qquad (99)$$

которыми опредѣляется относительно расположеніе двухъ системъ координатныхъ осей, не могутъ быть всѣ выбраны совершенно произвольно, но связаны между собой шестью независимыми уравненіями. Дѣйствительно, по отношенію къ осямъ x,y,z, которыя мы можемъ вообще говоря выбрать совершенно произвольно, положеніе каждой прямой опредѣляется четырьмя, а положеніе осей x',y',z' можно задать двѣнадцатью независимыми параметрами, функціями которыхъ и должны быть 24 коэффиціента комплексныхъ чиселъ

$$l_1,m_1,n_1;\ l_2,m_2,n_2;\ l_3,m_3,n_3;\ \lambda',\mu',\nu'$$

характеризующихъ положеніе осей x',y',z' по отношенію другъ къ другу и къ осямъ x,y,z. Между этими коэффиціентами должны существовать поэтому двѣнадцать независимыхъ соотношеній, разысканіемъ которыхъ мы теперь и займемся.

Такъ какъ l_1,m_1,n_1 суть косинусы трехъ комплексныхъ угловъ, образуемыхъ осью x' съ осями x,y,z, то по формулѣ (85) мы имѣемъ

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & l_1 \\ \nu & 1 & \lambda & m_1 \\ \mu & \lambda & 1 & n_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad [3](123) \qquad (100)$$

Подобнымъ же уравненіямъ будутъ удовлетворять и числа l_2,m_2,n_2; l_3,m_3,n_3. Мы имѣемъ такимъ образомъ три уравненія: уравненіе (100) и еще два, получающіяся изъ него круговой перестановкой значковъ 1,2,3, что и указано нами цифрой 3 поставленной въ квадратныхъ скобкахъ и символомъ круговой подстановки (123). Далѣе формула (92) даетъ намъ

$$\Delta\lambda'=-\begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & l_2 \\ \nu & 1 & \lambda & m_2 \\ \mu & \lambda & 1 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 0 \end{vmatrix} \quad [3](123)(\lambda'\mu'\nu') \quad (101)$$

и еще два подобныхъ же уравненія, получающихся изъ этого круговой подстановкой буквъ λ',μ',ν' и знаковъ 1,2,3 у l,m,n.

Изъ геометрическаго смысла соотношеній (100) и (101) видно, что они между собой независимы, а такъ какъ, съ другой стороны, каждое изъ уравненій (100) и (101) между комплексными числами распадается на два ур. между числами вещественными, то очевидно, что 6 ур. (100) и (101) исчерпываютъ всѣ двѣнадцать независимыхъ соотношеній между коэффиціентами чиссл (99). Итакъ искомыя нами соотношенія между величинами, характеризующими относительное положеніе осей x,y,z и x',y',z', могутъ быть соединены въ шесть уравненій между комплексными числами (99).

Выведемъ еще нѣсколько уравненій между тѣми же числами, уравненій, которыя, какъ мы знаемъ, уже не будутъ независимы отъ предыдущихъ, но должны представлять ихъ слѣдствіе. Замѣчая, что l_1,l_2,l_3; m_1,m_2,m_3; n_1,n_2,n_3 суть косинусы комплексныхъ угловъ, которые соотвѣтственно оси x,y,z

образуютъ съ осями x',y',z' по формуламъ (85) и (92) получаемъ

$$\Delta'=-\begin{vmatrix} 1 & \nu' & \mu' & l_1 \\ \nu' & 1 & \lambda' & l_2 \\ \mu' & \lambda' & 1 & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad [3]\ (lmn) \qquad (102)$$

$$\Delta'\lambda=-\begin{vmatrix} 1 & \nu' & \mu' & m_1 \\ \nu' & 1 & \lambda' & m_2 \\ \mu' & \lambda' & 1 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad [3]\ (lmn)(\lambda,\mu,\nu) \qquad (103)$$

Умноживъ опредѣлитель

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$$

послѣдовательно два раза на опредѣлитель

$$\sum(\pm l_1 m_2 n_3),$$

и пользуясь равенствами (100) и (101), получаемъ

$$\Delta^2\left[\sum(\pm l_1 m_2 n_3)\right]^2=\Delta^3\Delta',$$

откуда

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}^2=\Delta\Delta'. \qquad (104)$$

Изъ этого равенства видно, что опредѣлитель уравненій (97) и (98) въ силу нашихъ предположеній относительно Δ и Δ' не равенъ числу, изображаемому точкой, лежащей на инваріантныхъ прямыхъ.

Обратимъ вниманіе на нѣкоторые частные случаи преобразованія координатъ.

1. Если относительное расположеніе осей x,y,z таково же какъ и осей x',y',z' и обѣ системы конгруэнтны, то $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$, $\nu=\nu'$, $\Delta=\Delta'$ и равенство (104) принимаетъ видъ

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=\Delta\sqrt{1}.$$

Чтобы опредѣлить какое значеніе корня квадратнаго должно

быть взято въ этомъ равенствѣ, мы замѣтимъ, что при непрерывномъ измѣненіи положенія осей x',y',z' относительно x,y,z числа l,m,n а слѣдовательно и опредѣлитель, стоящій въ первой части равенства, должны измѣняться непрерывно. Такъ какъ съ другой стороны изъ равенства видно, что опредѣлитель, о которомъ идетъ рѣчь, можетъ имѣть только четыре значенія, то онъ, измѣняясь непрерывно, будетъ имѣть только одно опредѣленное значеніе, каково бы ни было положеніе системы x',y',z' относительно системы x,y,z. Но мы имѣемъ тожественно

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \Delta, \qquad (105)$$

когда система x',y',z' совпадаетъ съ системой x,y,z, ибо тогда

$$l_1 = m_2 = n_3 = 1, \; m_3 = n_2 = \lambda, \; n_1 = l_3 = \mu, \; l_2 = m_1 = \nu;$$

слѣдовательно соотношеніе (105) должно имѣть мѣсто всегда, каково бы ни было положеніе системы x',y',z' относительно системы x,y,z.

2. Предположимъ, что оси x',y',z' служатъ общими перпендикулярами къ x,y,z: ось x'—между y и z, ось y'—между z и x, ось z'—между x и y. Систему осей x',y',z' мы будемъ называть дополнительной къ системѣ x,y,z. Такъ какъ оси x,y,z служатъ общими перпендикулярами къ x',y',z': ось x—между y' и z', ось y—между z' и x', ось z—между x' и y', то они свою очередь образуютъ систему дополнительную къ системѣ x',y',z'. Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$l_2 = l_3 = m_3 = m_1 = n_1 = n_2 = 0$$

и уравненія (97), (98), (100), (101) и (104) принимаютъ видъ

$$x' = l_1 a, \quad x = l_1 a',$$
$$y' = m_2 b, \quad y = m_2 b',$$
$$z' = n_3 c, \quad z = n_3 c',$$

$$l_1^2 \Delta_{11} = \cos^2(xx')\Delta_{11} = \Delta, \quad \Delta\lambda' = \Delta_{23} m_2 n_3,$$
$$m_2^2 \Delta_{22} = \cos^2(yy')\Delta_{22} = \Delta, \quad \Delta\mu' = \Delta_{31} n_3 l_1,$$
$$n_3^2 \Delta_{33} = \cos^2(zz')\Delta_{33} = \Delta, \quad \Delta\nu' = \Delta_{12} l_1 m_2,$$

$$l_1^2 m_2^2 n_3^2 = \Delta\Delta'.$$

Изъ этихъ уравненій опредѣляются $\cos(xx')$, $\cos(yy')$, $\cos(zz')$, λ', μ', ν' и Δ'.

3. Предположимъ, что системы осей x,y,z и $x',y'z'$ образуютъ двѣ ортогональныя системы, причемъ оси одной и той же системы или проходятъ всѣ черезъ одну и ту же точку, или всѣ лежатъ въ одной плоскости. Такъ какъ проэкціи мотора на оси прямоугольной системы равняются его составляющимъ по тѣмъ же осямъ

$$x=a,\ y=b,\ z=c;\quad x'=a',\ y'=b',\ z'=c',$$

то формулы преобразованія координатъ теперь принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} x'&=l_1x+m_1y+n_1z, & x&= l_1x'+ l_2y'+ l_3z',\\ y'&=l_2x+m_2y+n_2z, & y&=m_1x'+ m_2y'+m_3z', \\ z'&=l_3x+m_3y+n_3z, & z&=n_1 x'+ n_2y'+ n_3z'. \end{aligned} \qquad (106)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\lambda=\mu=\nu=\lambda'=\mu'=\nu'=0,\ \Delta=\Delta'=1,$$

и соотношенія между числами l,m,n упрощаются и переходятъ въ слѣдующія

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \qquad [3](123) \qquad (107)$$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \qquad [3](123) \qquad (108)$$

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \qquad [3](lmn) \qquad (109)$$

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0 \qquad [3](lmn) \qquad (110)$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=1. \qquad (111)$$

Изъ (107), (108) и (111), какъ извѣстно выводятся еще девять:

$$l_1=m_2n_3-m_3n_2 \qquad [3](123) \qquad (112)$$

$$l_1=m_2n_3-m_3n_2. \qquad [3](lmn) \qquad (113)$$

67. **Инваріанты.** — Познакомившись съ формулами преобразованія координатъ, мы перейдемъ теперъ къ разсмотрѣнію инваріантовъ этого преобразованія. Инваріанты могутъ быть двухъ типовъ: аналитическіе и геометрическіе. Подъ аналитическимъ инваріантомъ мы разумѣемъ такую функцію

координатъ одного или нѣсколькихъ моторовъ, которая при преобразованіи координатъ своего вида не измѣняетъ, а подъ геометрическимъ—моторъ построенный по даннымъ моторамъ и числамъ такимъ образомъ, что координаты его выражаются всегда однѣми и тѣми же функціями данныхъ чиселъ и координатъ моторовъ, каковы бы ни были координатныя оси, къ которымъ мы относимъ данные моторы и ихъ геометрическій инваріантъ.

Обращаясь къ краткому обзору инваріантовъ, замѣтимъ, что мы уже разсматривали инваріантъ одного мотора: тензоръ мотора. Что тензоръ мотора представляетъ собой инваріантъ, это ясно изъ самаго его опредѣленія. Напомнимъ однако, что наше опредѣленіе тензора мотора примѣнимо только къ такому мотору, который имѣетъ ось, и мы показали въ § 64, что тензоръ мотора, имѣющаго ось, опредѣляется формулой (81). Въ слѣдующемъ параграфѣ мы докажемъ, что выраженіе (81) представляетъ собой инваріантъ независимо отъ того, имѣемъ ли моторъ оси или нѣтъ, и, пользуясь этимъ обстоятельствомъ, дадимъ другое опредѣленіе тензору, завѣдомо приложимое ко всякому мотору. Изъ болѣе сложныхъ инваріантовъ мы разсмотримъ только инваріанты одного и двухъ моторовъ. Съ однимъ весьма важнымъ геометрическимъ инваріантомъ двухъ моторовъ мы уже знакомы: это сумма двухъ моторовъ. Инваріантный характеръ суммы ясенъ уже самъ собой изъ ея опредѣленія, которое показываетъ намъ, что сумма двухъ моторовъ можетъ зависѣть только отъ слагаемыхъ моторовъ, но нисколько отъ той или другой системы координатъ, къ которой мы ихъ относимъ. Въ этомъ можно легко убѣдиться и при помощи формулъ преобразованія координатъ, замѣчая, во-первыхъ, что проэкціи и составляющія суммы равняются суммамъ соотвѣтствующихъ проэкцій и составляющихъ слагаемыхъ, а во-вторыхъ, что новыя проэкціи и составляющія мотора выражаются черезъ старыя линейными и однородными функціями. По отношенію къ суммѣ, этому основному инваріанту, всѣ другіе инваріанты, которые мы будемъ разсматривать, находятся въ значительномъ отношеніи: всѣ они носятъ характеръ произведенія, такъ что операція, которая служитъ для ихъ полученія по даннымъ моторамъ и числамъ, обладаетъ свойствомъ дистрибутивности относительно операціи сложенія. Важное значеніе инваріантовъ, о которыхъ идетъ рѣчь, обусловливается еще и тѣмъ обстоятельствомъ, что они являются въ нѣкоторомъ смыслѣ единственными въ своемъ родѣ, а именно относительно ихъ можно доказать слѣдующую теорему: существуетъ безчислен-

ное множество инваріантовъ, которые можно назвать произведеніемъ мотора на моторъ или мотора на число, но всѣ они весьма просто получаются изъ тѣхъ, которые мы будемъ разсматривать въ слѣдующихъ параграфахъ: геометрическаго и векторнаго произведенія моторовъ и произведенія мотора на число.

68. **Геометрическое произведеніе.**

Теорема I.—*Сумма произведеній составляющихъ какого нибудь мотора по координатнымъ осямъ на соотвѣтствующія проэкціи на тѣ же оси другого мотора не зависитъ отъ выбора осей.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какія нибудь двѣ системы координатъ x,y,z и x',y',z', и пусть проэкціи и составляющія моторовъ ϱ и ϱ_1 на этихъ осяхъ суть

$$\left.\begin{matrix} x,y,z;\ a,b,c \\ x',y',z';\ a',b',c' \end{matrix}\right\}\varrho \qquad \left.\begin{matrix} x_1,y_1,z_1;\ a_1,b_1,c_1 \\ x_1',y_1',z_1';\ a_1',b_1',c_1' \end{matrix}\right\}\varrho_1$$

Между проэкціями и составляющими мотора ϱ существуютъ соотношенія (97) и (98); подобныя же соотношенія существуютъ и между проэкціями и составляющими мотора ϱ_1, напримѣръ

$$\begin{aligned} x_1' &= l_1a_1 + m_1b_1 + n_1c_1, \\ y_1' &= l_2a_1 + m_2b_1 + n_2c_1, \\ z_1' &= l_3a_1 + m_3b_1 + n_3c_1. \end{aligned}$$

Если умножимъ послѣднія равенства на a',b',c' соотвѣтственно и сложимъ, то, воспользовавшись (98), послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$x_1'a' + y_1'b' + z_1'c' = xa_1 + yb_1 + zc_1 \qquad (114)$$

—равенство, которое имѣетъ мѣсто каково бы нибыло положеніе осей x,y,z и x',y',z'. Если мы будемъ измѣнять положеніе осей x,y,z, оси же x',y',z' оставимъ неподвижными, то числа x_1',y_1',z_1',a',b',c' будутъ оставаться постоянными, числа же x,y,z,a_1,b_1,c_1 будутъ измѣняться, но сумма

$$xa_1 + yb_1 + zc_1,$$

какъ показываетъ послѣднее равенство, не будетъ зависѣть отъ выбора осей x,y,z.

Намъ остается еще показать, что сумма произведеній проэкцій одного изъ моторовъ ϱ,ϱ_1 на соотвѣтствующія составляющія другого не зависитъ отъ того, возьмемъ ли мы проэкціи мотора ϱ и составляющія мотора ϱ_1 или обратно проэкціи мотора ϱ_1 и составляющія мотора ϱ. Сдѣлать это не трудно. Ибо предположивъ, что оси x',y',z' совпадаютъ съ осями x,y,z, мы имѣемъ

$$x_1'=x_1,y_1'=y_1,z_1'=z_1;\ a'=a,b'=b,c'=c,$$

и равенство (114) даетъ намъ

$$x_1a+y_1b+z_1c=xa_1+yb_1+zc_1. \qquad (115)$$

Итакъ теорема доказана.

Теорема II.—*Сумма произведеній проэкцій какого нибудь мотора на соотвѣтствующія его составляющія не зависитъ отъ выбора координатныхъ осей.*

Эта теорема представляетъ собой очевидно частный случай предыдущей въ предположеніи, что моторъ $\varrho=\varrho_1$.

Данныя нами выше опредѣленія тензора мотора (§ 52) и геометрическаго произведенія двухъ моторовъ приложимы только къ такого рода моторамъ, которые имѣютъ оси, находящіяся на конечномъ разстояніи. Опираясь на двѣ предыдущія теоремы, мы дадимъ теперь другія опредѣленія для тензора мотора и геометрическаго произведенія двухъ моторовъ, которыя представляютъ обобщеніе старыхъ опредѣленій и, ставя понятіе о тензорѣ и геометрическомъ произведеніи только въ зависимость отъ проэкцій и составляющихъ моторовъ, а не отъ осей моторовъ, будутъ приложимы ко всякимъ моторамъ независимо отъ того, имѣютъ ли они оси или нѣтъ.

Тензоромъ мотора мы будемъ называть число, квадратъ котораго равняется суммѣ произведеній составляющихъ мотора на соотвѣтствующія его проэкціи. Такимъ образомъ тензоръ $H=R+\omega G$ мотора ϱ, котораго проэкціи суть x,y,z и составляющія a,b,c опредѣляется уравненіемъ:

$$H^2=ax+by+cz. \qquad (81)$$

Изъ теоремы II видно, что тензоръ мотора характеризуется самимъ моторомъ, но не зависитъ отъ осей x,y,z, къ которымъ мы его относимъ. Это новое опредѣленіе тензора приложимо ко всякому мотору, такъ какъ для всякаго мотора мы можемъ найти проэкціи и составляющія; оно не про-

тиворѣчитъ ранѣе данному, какъ видно изъ теоремы § 64, и было бы съ этимъ послѣднимъ совершенно тожественно, если бы мы доказали, что всякій моторъ имѣетъ ось. Всѣ выше данныя выраженія для тензора мотора черезъ проэкціи мотора или его составляющія и выведенныя нами въ предположеніи, что моторъ имѣетъ ось будутъ очевидно представлять выраженіе тензора и при новомъ опредѣленіи, ибо они выводятся всѣ изъ формулы (81), которая согласно нашему новому опредѣленію даетъ тензоръ какого угодно мотора независимо отъ того, имѣетъ ли онъ ось или нѣтъ.

Геометрическимъ произведеніемъ двухъ моторовъ мы будемъ называть сумму произведеній составляющихъ одного изъ нихъ на соотвѣтствующія проэкціи другого. Такимъ образомъ означая черезъ $\overline{\varrho\varrho_1}$ геометрическое произведеніе моторовъ ϱ и ϱ_1 мы имѣемъ

$$\overline{\varrho\varrho_1}=xa_1+yb_1+zc_1=x_1a+y_1b+z_1c. \qquad (116)$$

Изъ теоремы первой видно, что геометрическое произведеніе двухъ моторовъ зависитъ только отъ самихъ моторовъ, а не отъ осей, къ которымъ мы ихъ отнесемъ. Новое опредѣленіе геометрическаго произведенія представляетъ обобщеніе стараго, ибо въ частномъ случаѣ, когда моторы ϱ и ϱ_1 имѣютъ оси по теоремѣ § 66

$$xa_1+yb_1+zc_1=HH_1\cos\vartheta,$$

гдѣ H и H_1 суть тензоры моторовъ ϱ и ϱ_1, а ϑ комплексный уголъ между направленіями осей, соотвѣтствующими этимъ тензорамъ. Формулы (88), (89) и (90) даютъ геометрическое произведеніе какихъ угодно моторовъ, ибо онѣ выведены изъ (87) тожественной съ (116), которая служитъ теперь новымъ опредѣленіемъ геометрическаго произведенія.

Если моторъ ϱ эквивалентенъ ротору, который имѣетъ линію ε своею осью и единицу своимъ тензоромъ, то формулы (80) даютъ намъ

$$x=\cos\vartheta_1,\ y=\cos\vartheta_2,\ z=\cos\vartheta_3,$$

гдѣ $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ суть комплексные углы, образуемые осью ε съ осями x,y,z, и геометрическое произведеніе моторовъ ϱ и ϱ_1 принимаетъ видъ

$$\overline{\varrho\varrho_1}=a_1\cos\vartheta_1+b_1\cos\vartheta_2+c_1\cos\vartheta_3.$$

Числа a_1,b_1,c_1 суть алгебраическія составляющія мотора ϱ_1 по осямъ; поэтому вторая часть послѣдняго ровенства представляетъ собой сумму проэкцій составляющихъ мотора ϱ_1 на линію ε, т. е. проэкцію мотора ϱ_1 на линію ε. Такимъ образомъ когда одинъ изъ двухъ моторовъ эквивалентенъ ротору съ тензоромъ равнымъ единицѣ, то геометрическое произведеніе моторовъ равняется проэкціи второго мотора на ось ротора.

Теорема III.—*Операція геометрическаго умноженія коммутативна и дистрибутивна по отношенію къ операціи сложенія.*

Свойства коммутативности выражаются равенствомъ (115), справедливость котораго была уже нами выше доказана.

Чтобы доказать дистрибутивность умноженія предположимъ, что ϱ представляетъ сумму моторовъ $\varrho^{(1)},\varrho^{(2)},\ldots$ а моторъ ϱ_1—сумму моторовъ $\varrho_1{}^{(1)},\varrho_1{}^{(2)},\ldots$ Обозначая черезъ x,y,z; $x^{(1)},y^{(1)},z^{(1)};\ldots$ проэкціи моторовъ $\varrho,\varrho^{(1)}\ldots$, черезъ a_1,b_1,c_1: $a_1{}^{(1)},b_1{}^{(1)},c_1{}^{(1)};\ldots$ составляющія моторовъ $\varrho_1,\varrho_1{}^{(1)},\ldots$, мы имѣемъ (сл. III теор. II и III § 63):

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots., \quad a_1=a_1{}^{(1)}+a_1{}^{(2)}+\ldots.$$
$$y=y^{(1)}+y^{(2)}+\ldots., \quad b_1=b_1{}^{(1)}+a_1{}^{(2)}+\ldots.$$
$$z=z^{(1)}+z^{(2)}+\ldots., \quad c_1=c_1{}^{(1)}+c_1{}^{(2)}+\ldots.$$

Отсюда

$$xa_1+yb_1+zc_1=\sum_{ik}(x^{(i)}a_1{}^{(k)}+y^{(i)}b_1{}^{(k)}+z^{(i)}c_1{}^{(k)})$$

или

$$\varrho\varrho_1=\sum_{ik}\overline{\varrho^{(i)}\varrho_1{}^{(k)}}.$$

Это послѣднее равенство и выражаетъ собой законъ дистрибутивности геометрическаго умноженія.

Слѣдствіе.—Квадратъ тензора суммы нѣсколькихъ моторовъ равняется суммѣ квадратовъ тензоровъ составляющихъ моторовъ сложенной съ суммой ихъ всѣхъ возможныхъ удвоенныхъ геометрическихъ произведеній.

Это слѣдствіе представляетъ частный случай теоремы, если предположимъ, что моторъ ϱ тожественъ съ моторомъ ϱ_1, а моторы $\varrho^{(1)},\ldots$ тожественны соотвѣтственно съ $\varrho_1{}^{(1)}\ldots$, ибо легко видѣть, что геометрическое произведеніе двухъ моторовъ обращается въ квадратъ тензора мотора, когда оба мотора становятся тожественными.

69. Умноженіе мотора на число.

Теорема I.—*Если $x,y,b;a,b,c$ суть проэкціи и составляющія мотора ϱ по осямъ $x,y.z$, то моторъ, проэкціи котораго на тѣ же оси суть sx,sy,sz, гдѣ s какое нибудь комплекное число, имѣетъ своими составляющими по тѣмъ же осямъ числа sa,sb,sc и зависитъ только отъ числа s и мотора ϱ, но не зависитъ отъ положенія оссй.*

Иначе говоря, если черезъ $x',y',z';a',b',c'$ мы означимъ проэкціи и составляющія мотора ϱ по новымъ осямъ x',y',z', то два мотора, у которыхъ проэкціи на новыя и старыя оси суть

$$sx,sy,sz;\ sx',sy',sz' \qquad (117)$$

тожественны между собой и тожественны съ двумя другими моторами, у которыхъ составляющія по старымъ и новымъ осямъ суть

$$sa,sb,sc;\ sa',sb',sc'. \qquad (118)$$

Въ такой формѣ теорема очевидна, ибо каждая изъ трехъ системъ комплексныхъ чиселъ

$$x',y',z';\ a,b,c;\ a',b',c' \qquad (119)$$

можетъ быть выражена по формуламъ преобразованія координатъ (97, 98) линейными и однородными функціями черезъ x,y,z, и когда мы умножимъ послѣднія на одно и то же число число s, то и числа (119) всѣ умножатся на s. Слѣдовательно (117) и (118) суть проэкціи и составляющія одного и того же мотора. Эта теорема приводитъ насъ къ слѣдующему опредѣленію.

Произведеніемъ мотора ϱ, проэкціи котораго суть x,y,z и составляющія a,b,c, на комплексное число $s=s_1+s_2\omega$ будемъ называть моторъ съ проэкціями sx,sy,sz и составляющими sa,sb,sc. Этотъ моторъ мы будемъ означать черезъ $s\varrho$ или ϱs.

Теорема II.—*Тензоры мотора $s\varrho$ равняются произведеніямъ s на тензоры ϱ; моторы ϱ и $s\varrho$ имѣютъ общія оси.*

Первая часть теоремы слѣдуетъ изъ того, что квадратъ тензора выражается квадратичной однородной функціей черезъ составляющія и проэкціи мотора.

Чтобы доказать вторую половину теоремы, предположимъ, что ось z совпадаетъ съ осью мотора ϱ, а оси x и y

пересѣкаются съ z. Очевидно, что при такомъ выборѣ координатныхъ осей составляющія мотора ϱ будутъ

$$a=0,\ b=0,\ c=H,$$

гдѣ H его тензоръ соотвѣтствующій оси z, а составляющія мотора $s\varrho$ будутъ равняться

$$sa=0,\ sb=0,\ sc=sH.$$

Поэтому моторъ $s\varrho$ имѣетъ тензоромъ число sH, а осью, соотвѣтствующею этому тензору, служитъ ось z, т. е. ось мотора ϱ. Итакъ теорема доказана.

Посмотримъ, къ какимъ результатамъ приводитъ насъ эта теорема въ тѣхъ случаяхъ, когда моторъ ϱ состоитъ изъ одного вектора или одного ротора.

1. Предположимъ сначала, что $s_2=0$ и $s=s_1$ число вещественное Если моторъ ϱ состоитъ изъ одного вектора σ, то $H=\omega G$, гдѣ G есть тензоръ σ, и моторъ $s\varrho$ имѣетъ своимъ тензоромъ число $sH=\omega s_1 G$, а осью лучъ вектора σ. Но такой моторъ представляетъ собой векторъ, который лежитъ на лучѣ σ и имѣетъ тензоромъ число $s_1 G$. Предполагая же, что моторъ ϱ состоитъ изъ одного только ротора C съ тензоромъ R, мы увидимъ, что произведеніе ротора C на число s, есть роторъ, который имѣетъ общую ось съ C и тензоръ равный произведенію тензора C на число s_1. Итакъ произведеніе вектора на обыкновенное число есть векторъ, а произведеніе ротора—роторъ.

Мы предоставляемъ читателю самому убѣдиться при помощи формулъ (9) и (19) въ справедливости слѣдующей теоремы.

Координаты точки y' конца вектора xy' равнаго произведенію вектора xy на число s_1 опредѣляются формулами:

$$y_1'=\lambda x_1+\mu y_1 \qquad (1234)$$

гдѣ $\lambda=(1-s_1)f(xy),\ \mu=s_1 f(xx)$

Координаты плоскости Y' ротора XY' равнаго произведенію ротора XY на число s_1 опредѣляются формулами:

$$Y_1'=\lambda X_1+\mu Y \qquad (1234)$$

гдѣ $\lambda=(1-s_1)F(XY),\ \mu=s_1 F(XX)$.

2. Предположимъ, во-вторыхъ, что $s_1=0$, $s_2=1$ и $s=\omega$. Если моторъ ϱ состоитъ изъ одного ротора C съ тензоромъ R, то $H=R$ и моторъ $\omega\varrho=\omega$C имѣетъ тензоромъ число ωR и

осью ось C. Такой моторъ представляетъ собой векторъ, который имѣетъ ось C своимъ лучомъ и тензоръ C своимъ тензоромъ для направленія луча ωC соотвѣтствующаго положительному направленію оси C. Если моторъ o состоитъ изъ одного вектора σ съ тензоромъ G, то $H=\omega G$ и моторъ $\omega o=\omega\sigma$ имѣетъ своимъ тензоромъ число $\omega H=\varkappa^2 G$ и осью—лучъ σ. Моторъ $\omega\sigma$ представляетъ собой слѣдовательно роторъ, который имѣетъ лучъ σ своею осью и произведеніе тензора σ на $\varkappa^2$ своимъ тензоромъ для направленія вращенія вокругъ луча σ, соотвѣтствующаго положительному направленію вектора σ. Условившись векторъ и роторъ, которые имѣютъ одну и ту же прямую своимъ лучомъ и осью называть эквиполентными, если при соотвѣтствіи ихъ положительныхъ направленій тензоры ихъ равны, мы видимъ такимъ образомъ, что произведеніе ротора на число ω равняется вектору эквиполентному съ роторомъ, а произведеніе вектора на число ω—произведенію ротора эквиполентнаго съ векторомъ на кривизну пространства.

Такъ какъ число $\varkappa$ имѣетъ измѣреніе $[AL^{-1}]$, то всегда можемъ надлежащимъ выборомъ единицы длины сдѣлать такъ, что $\varkappa^2$ будетъ равняться $+1$ для эллиптическаго пространства и—1—для гиперболическаго. Замѣчая, что въ параболическомъ пространствѣ $\varkappa^2=0$, мы видимъ, что раскрытое нами свойство числа ω въ зависимости отъ кривизны пространства будетъ видоизмѣняться слѣдующимъ образомъ.

Въ эллиптическомъ пространствѣ при надлежащемъ выборѣ единицы длины произведеніе ротора на ω получается замѣной ротора эквиполентнымъ съ нимъ векторомъ, а произведеніе вектора на ω—замѣной вектора эквиполентнымъ съ нимъ роторомъ.

Въ гиперболическомъ пространствѣ при надлежащемъ выборѣ единицы длины умноженіе ротора на ω соотвѣтствуетъ преобразованію ротора въ эквиполентный съ нимъ векторъ, а умноженіе вектора на ω—преобразованію вектора въ эквиполентный съ нимъ роторъ и перемѣнѣ направленія этого послѣдняго на противоположное (т. е. замѣнѣ начальной плоскости конечной и обратно).

Наконецъ въ параболическомъ пространствѣ произведеніе ротора на ω равняется эквиполентному съ роторомъ вектору, а произведеніе вектора на ω всегда равняется нулю.

Свойство числа ω обращать роторъ въ векторъ и векторъ въ роторъ, представляющее собой слѣдствіе опредѣленій тензора мотора, операціи умноженія мотора на комплексное

число и свойства числа ω, выражающагося равенствомъ $\omega^2=\varkappa^2$, настолько характерно для числа ω, что оно въ свою очередь, какъ въ этомъ мы сейчасъ убѣдимся, можетъ служить опредѣленіемъ числа ω, изъ котораго прямымъ слѣдствіемъ является равенство $\omega^2=\varkappa^2$.

Дѣйствительно, условимся характеризовать операцію замѣны ротора эквиполентнымъ съ нимъ векторомъ символомъ ω: мы назовемъ эту операцію умноженіемъ ротора на символъ ω. Такимъ образомъ произведеніе ротора $\mathfrak{A}$ на символъ ω, $\omega\mathfrak{A}$, есть векторъ, который ось и тензоръ $\mathfrak{A}$ имѣетъ своимъ лучомъ и тензоромъ. Такъ какъ векторъ $\omega\mathfrak{A}$ эквивалентенъ полярному съ нимъ ротору $\mathfrak{B}$, то мы можемъ также сказать, что умножить роторъ $\mathfrak{A}$ на ω это значитъ роторъ $\mathfrak{A}$ замѣнить ротором $\mathfrak{B}$, который поляру оси $\mathfrak{A}$ имѣетъ своею осью и число $\varkappa T(\mathfrak{A})$ своимъ тензоромъ. Умножая равенство:

$$\omega\mathfrak{A}=\mathfrak{B}.$$

на ω, мы получаемъ:

$$\omega(\omega\mathfrak{A})=\omega\mathfrak{B}.$$

Но векторъ $\omega\mathfrak{B}$, мы знаемъ, эквивалентенъ ротору, для котораго осью служитъ поляра оси $\mathfrak{B}$, т. е. ось $\mathfrak{A}$, и тензоромъ число $\varkappa T(\mathfrak{B})=\varkappa^2 T(\mathfrak{A})$; слѣдовательно

$$\omega(\omega\mathfrak{A})=\varkappa^2\mathfrak{A}.$$

Такимъ образомъ умноженіе вектора $\omega\mathfrak{A}$ на символъ ω равносильно замѣнѣ вектора эквиполентнымъ съ нимъ ротором $\mathfrak{A}$ и умноженію этого послѣдняго на кривизну пространства. Если мы условимся вмѣсто $\omega(\omega\mathfrak{A})$ писать $\omega^2(\mathfrak{A})$, то послѣднее равенство мы можемъ представить въ такомъ видѣ

$$\omega^2\mathfrak{A}=\varkappa^2\mathfrak{A},$$

откуда заключаемъ, что

$$\omega^2=\varkappa^2.$$

Итакъ символъ ω, который мы опредѣлили какъ операторъ, преобразующій роторъ въ эквиполентный съ нимъ векторъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что квадратъ его равняется кривизнѣ пространства, и потому ничто не мѣшаетъ намъ отождествить его съ числомъ ω, квадратъ котораго также равняется кривизнѣ пространства.

Относительно символа ω сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе. Такъ какъ этотъ символъ преобразуетъ роторъ въ векторъ и векторъ въ роторъ и слѣдовательно, являясь множителемъ, мѣняетъ наименованіе множимаго, то его мы должны считать, если можно такъ выразиться, именованнымъ символомъ. Принимая во вниманіе, что $\omega^2=\varkappa^2$, мы должны измѣреніе его считать одинаковымъ съ измѣреніемъ $\varkappa$, т. е. $[AL^{-1}]$. При такомъ условіи тензоръ мотора и комплексный уголъ между двумя прямыми будутъ имѣть размѣры угла и всѣ уравненія, съ которыми мы имѣемъ дѣло становятся однородными и удовлетворяютъ основному требованію, которое можно предъявить ко всякому уравненію геометріи, механики и физики.

3. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ точки пересѣченія луча вектора xy съ абсолютомъ, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$—плоскости проведенныя черезъ ось ротора XY и касательныя къ абсолюту. Если лучъ xy совпадаетъ съ осью XY и если при соотвѣтствіи между направленіями $\mathfrak{ab}$ и $\mathfrak{AB}$ (§ 51) рядъ $\mathfrak{ab}xy$ проэктивенъ съ пучкомъ $\mathfrak{AB}XY$:

$$\mathfrak{ab}xy)\overline{\wedge}(\mathfrak{AB}XY),$$

или, что все равно, ангармоническія отношенія $(\mathfrak{ab}xy)$ и $(\mathfrak{AB}XY)$ равны:

$$(\mathfrak{ab}xy)=(\mathfrak{AB}XY),$$

то векторъ xy и роторъ XY будемъ называть эквіангармоническими. Помощью формулъ (9) и (19) легко убѣдиться, что векторъ xy и роторъ XY, связанные соотношеніемъ

$$\frac{\omega}{\varkappa}(xy)=XY, \text{ или } \frac{\omega}{\varkappa}(XY)=xy,$$

эквіангармоничны. Такимъ образомъ операція умноженія на $\omega/\varkappa$ разнозначна съ преобразованіемъ вектора въ эквіангармоничный съ нимъ роторъ и обратно.

Теорема III.—*Умноженіе мотора на комплексное число дистрибутивно по отношенію къ операціи сложенія.*

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что моторъ ϱ есть сумма моторовъ $\varrho^{(1)},\varrho^{(2)},\ldots$ имѣемъ

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots,\ y=y^{(1)}+y^{(2)}+\ldots,\ z=z^{(1)}+z^{(2)}+\ldots$$

гдѣ x,y,z; $x^{(1)},y^{(1)},z^{(1)}$; $x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}$; ... суть проэкціи моторовъ $\varrho,\varrho^{(1)},\varrho^{(2)},\ldots$ на координатныя оси. Умноживъ эти равенства

на s, получимъ

$$sx=sx^{(1)}+sx^{(2)}+\ldots,\quad sy=sy^{(1)}+sy^{(2)}+\ldots,\quad sz=sz^{(1)}+sz^{(2)}+\ldots;$$

отсюда заключаемъ, что

$$s\varrho=s\varrho^{(1)}+s\varrho^{(2)}+\ldots$$

Съ другой стороны изъ равенствъ

$$(s_1+s_2+\ldots)\,x=s_1x+s_2x+\ldots,$$
$$(s_1+s_2+\ldots)\,y=s_1y+s_2y+\ldots,$$
$$(s_1+s_2+\ldots)\,z=s_1z+s_2z+\ldots$$

слѣдуетъ $\quad(s_1+s_2+\ldots)\varrho=s_1\varrho+s_2\varrho+\ldots$

Итакъ теорема доказана.

Слѣдствіе.—Если системы моторовъ $U(\varrho_1,\varrho_2,\ldots)$ и $V(\sigma_1,\sigma_2,\ldots)$ эквивалентны, то эквивалентны и системы моторовъ $(s\varrho_1,s\varrho_2,\ldots)$ и $(s\sigma_1,s\sigma_2,\ldots)$. Ибо умножая равенство

$$\varrho_1+\varrho_2+\ldots=\sigma_1+\sigma_2+\ldots$$

выражающее эквивалентность системъ U и V на s, мы получаемъ, пользуясь свойствомъ дистрибутивности, равенство

$$s\varrho_1+s\varrho_2+\ldots=s\sigma_1+s\varrho_2+\ldots,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что системы $(s\varrho_1,s\varrho_2,\ldots)$ и $(s\sigma_1,s\sigma_2,\ldots)$ эквивалентны.

Обратимъ вниманіе на частные случаи этого слѣдствія.

1. Предположимъ, что система U, состоящая изъ векторовъ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ и роторовъ $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\ldots$, эквивалентна системѣ V, состоящей изъ векторовъ $\beta_1,\beta_2,\ldots$ и роторовъ $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\ldots$ Если мы умножимъ всѣ векторы и роторы этихъ двухъ системъ на число ω, то мы получимъ двѣ новыя системы

$$\omega\alpha_1,\omega\alpha_2,\ldots\ \omega\mathfrak{A}_1,\omega\mathfrak{A}_2,\ldots$$
$$\omega\beta_1,\omega\beta_2,\ldots\ \omega\mathfrak{B}_1,\omega\mathfrak{B}_2,\ldots$$

которыя по доказанному также будутъ эквивалентны. Припоминая какой геометрическій смыслъ имѣетъ операція умноженія вектора и ротора на число ω, мы приходимъ слѣдовательно къ такой теоремѣ.

Если двѣ системы, которыя состоятъ отчасти изъ векторовъ отчасти изъ роторовъ, эквивалентны, то, замѣнивъ роторы эквиполентными съ ними векторами, а векторы эквиполентными съ ними роторами и умноживъ послѣдніе на кривизну пространства, мы получаемъ двѣ новыя системы, которыя также будутъ эквивалентны.

Такъ какъ для пространства, кривизна котораго не равняется ни нулю ни безконечности, всегда можно надлежащимъ выборомъ единицы длины сдѣлать модуль $\varkappa$ равнымъ единицѣ, то доказанная нами теорема можетъ быть для каждаго типа пространства формулирована слѣдующимъ образомъ.

Для пространства кривизна котораго равняется нулю: если двѣ системы эквивалентны, то, замѣнивъ роторы эквиполентными съ ними векторами, а векторы совсѣмъ выбросивъ изъ системы, мы получаемъ двѣ новыя эквивалентныя системы векторовъ.

Для пространства, кривизна котораго равняется безконечности: если двѣ системы эквивалентны, то, замѣнивъ векторы эквиполентными съ ними роторами, а роторы совсѣмъ выбросивъ изъ системы, мы получаемъ двѣ новыя эквивалентныя системы роторовъ.

Для пространства положительной кривизны: если двѣ системы эквивалентны, то, выбирая надлежащимъ образомъ единицу длины и замѣняя роторы эквиполентными съ ними векторами, а векторы—эквиполентными съ ними роторами, мы получаемъ двѣ новыя эквивалентныя системы.

Для пространства отрицательной кривизны: если двѣ системы эквивалентны, то при надлежащемъ выборѣ единицы длины, замѣняя роторы эквиполентными съ ними векторами, а векторы эквиполентными съ ними роторами и измѣняя направленіе этихъ послѣднихъ на противоположное, мы получимъ двѣ новыя системы, которыя также будутъ эквиваленты.

Въ частныхъ случаяхъ, когда разсматриваемыя системы состоятъ только изъ векторовъ или роторовъ, теорема обращается въ слѣдующія.

Если двѣ системы роторовъ эквивалентны, то тѣ двѣ системы векторовъ, которыя получимъ, замѣнивъ роторы эквиполентными векторами, будутъ также эквивалентны, когда кривизна пространства конечна, и вообще говоря не будутъ эквивалентны въ пространствѣ безконечно большой кривизны.

Если двѣ системы векторовъ эквивалентны, то двѣ системы роторовъ, которыя получимъ, замѣнивъ векторы эквиполентными съ ними роторами, будутъ также эквивалентны, когда кривизна пространства не равняется нулю, и вообще

говоря не будутъ эквивалентны, въ пространствѣ нулевой кривизны.

2. Въ томъ случаѣ, когда $s=\omega/\varkappa$, только что доказанная теорема обращается въ слѣдующую.

Если двѣ системы, которыя состоятъ отчасти изъ векторовъ отчасти изъ роторовъ, эквивалентны, то, замѣнивъ векторовы эквіангармоничными съ ними роторами, а роторы эквіангармоничными съ ними векторами, получимъ двѣ новыя системы, которыя также будутъ эквивалентны.

3. Когда модуль числа s равенъ единицѣ, такъ что

$$s=\cosh u+\frac{\omega}{\varkappa}\sinh u,$$

гдѣ u аргументъ числа s, то при умноженіи мотора на число s модуль его не измѣняется, а аргументъ увеличивается на число u. Такимъ образомъ, если мы у всѣхъ моторовъ двухъ эквивалентныхъ системъ увеличимъ аргументы на одно и то же число, то системы останутся эквивалентными. Замѣчая, что въ Эвклидовомъ пространствѣ аргументъ мотора равняется его параметру, мы видимъ, что эта теорема представляетъ собой обобщеніе извѣстной теоремы Ball'я.

70. Векторное произведеніе двухъ моторовъ.

Теорема I.—*Моторъ* ϱ_3, *проэкціи котораго* x_3,y_3,z_3 *на три взаимно перпендикулярныя оси опредѣляются формулами*

$$x_3=y_1z_2-y_2z_1,\ y_3=z_1x_2-z_2x_1,\ z_3=x_1y_2-x_2y_1, \quad (120)$$

гдѣ x_1,y_1,z_1; x_2,y_2,z_2 *суть проэкціи на тѣ же оси соотвѣтственно моторовъ* ϱ_1 *и* ϱ_2, *представляетъ собой геометрическій инваріантъ моторовъ* ϱ_1 *и* ϱ_2.

Въ самомъ дѣлѣ, означая проэкціи моторовъ $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3$ на три взаимно перпендикулярныя оси x',y',z', образующихъ другую систему, отличную отъ системы осей x,y,z, соотвѣтственно тѣми же буквами, какъ и проэкціи ихъ на оси x,y,z, но со значками вверху, легко докажемъ помощью формулъ преобразованія координатъ и формулъ (112) и (113), что

$$x_3'=y_1'z_2'-y_2'z_1',\ y_3'=z_1'x_2'-z_2'x_1',\ z_3'=x_1'y_2'-x_2'y_1'.$$

Изъ этихъ равенства мы заключаемъ, что проэкціи мотора ϱ_3 на три взаимно перпендикулярныя оси выражаются всегда одинаково черезъ проэкціи моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 на тѣ же оси,

каково бы ни было положеніе осей: моторъ ϱ_3 представляетъ слѣдовательно инваріантъ моторовъ ϱ_1 и ϱ_2. Мы будемъ называть его векторнымъ произведеніемъ моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 и означать черезъ $V\varrho_1\varrho_2$:

$$\varrho_3 = V\varrho_1\varrho_2.$$

Теорема II.—*Когда моторы ϱ_1 и ϱ_2 имѣютъ оси, то общіе къ нимъ перпендикуляры служатъ осями $V\varrho_1\varrho_2$. Если H_1 и H_2 суть тензоры моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 соотвѣтствующіе какимъ нибудь винтовымъ направленіямъ осей ϱ_1,ϱ_2, $\vartheta=\theta+\omega\delta$—комплексный уголъ между направленіями этихъ послѣднихъ, соотвѣтствующій какому нибудь винтовому направленію одного изъ общихъ къ осямъ ϱ_1 и ϱ_2 перпендикуляровъ, то тензоръ $V\varrho_1\varrho_2$, соотвѣтствующій тому же направленію того же перпендикуляра будетъ равняться $H_1H_2\sin\vartheta$.*

Для доказательства теоремы примемъ ε, общій къ осямъ α и β моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 перпендикуляръ за ось z, ось α мотора ϱ_1 за ось x и, наконецъ, прямую проведенную черезъ точку пересѣченія ε и α и къ нимъ перпендикулярную за ось y. Приписавъ линіямъ α,β,ε какія нибудь винтовыя направленія, означимъ черезъ H_1 и H_2 тензоры моторовъ ϱ_1 и ϱ_2, соотвѣтствующіе направленіямъ α и β, и черезъ $\vartheta=\theta+\omega\delta$ комплексный уголъ между направленіями α и β, соотвѣтствующій направленію ε. Такъ какъ при нашемъ выборѣ координатныхъ осей комплексные углы, которые направленія осей α и β образуютъ съ направленіями осей x,y,z таковы

$$0,\pi/2,\ \pi/2;\ \vartheta,\vartheta-\pi/2,\ \pi/2,$$

то по формуламъ (80) проэкціи моторовъ ϱ_1 и ϱ_2 равняются

$$x_1=H_1,\ y_1=0,\ z_1=0,\ x_2=H_2\cos\vartheta,\ y_2=H_2\sin\vartheta,\ z_2=0$$

и слѣдовательно $x_3=0,\ y_3=0,\ z_3=H_1H_2\sin\vartheta$.

Отсюда видно, что линія ε служитъ осью мотора $V\varrho_1\varrho_2$, а $H_1H_2\sin\vartheta$ его тензоромъ, соотвѣтствующимъ выбранному направленію оси ε. Итакъ теорема доказана.

Теорема III.—*Векторное умноженіе дистрибутивно по отношенію къ сложенію моторовъ, но не коммутативно: съ перемѣной порядка множителей произведеніе мѣняетъ знакъ.*

Въ этомъ послѣднемъ свойствѣ векторнаго произведенія, которое выражается равенствомъ $V\varrho_1\varrho_2=-V\varrho_2\varrho_1$, мы легко

убѣдимся, замѣчая, что вторыя части (120) мѣняютъ свой знакъ, если мы обмѣняемъ мѣстами проэкціи мотора ϱ_1 съ проэкціями мотора ϱ_2.

Чтобы доказать дистрибутивность умноженія, мы предположимъ, что ϱ_1 равняется суммѣ двухъ моторовъ $\varrho_1'(x_1',y_1',z_1')$ и $\varrho_2''(x_1'',y_1'',z_1'')$, а ϱ_2 — суммѣ моторовъ $\varrho_2'(x_2',y_2',z_2')$ и $\varrho_2''(x_2'',y_2'',z_2'')$. Тогда

$$x_1=x_1'+x_1'',\ y_1=y_1'+y_1'',\ z_1=z_1'+z_1'',$$
$$x_2=x_2'+x_2'',\ y_2=y_2'+y_2'',\ z_2=z_2'+z_2'',$$

и, составляя координаты $V\varrho_1\varrho_2$, мы будемъ имѣть равенство

$$y_1z_2-y_2z_1=y_1'z_2'-y_2'z_1'+y_1'z_2''-y_2''z_1'+$$
$$+y_1''z_2'-y_2'z_1''+y_1''z_2''-y_2''z_1''$$

и еще два подобныхъ же, получающихся изъ этого круговой перестановкой буквъ x,y,z. Изъ нихъ мы заключаемъ, что

$$V\varrho_1\varrho_2=V(\varrho_1'+\varrho_1'')(\varrho_2'+\varrho_2'')=$$
$$=V\varrho_1'\varrho_2'+V\varrho_1'\varrho_2''+V\varrho_1''\varrho_2'+V\varrho_1''\varrho_2''.$$

Это равенство и выражаетъ собой свойство дистрибутивности векторнаго умноженія.

71. **Вещественныя координаты мотора.**—Теорія проэкцій и составляющихъ мотора, развитая нами въ предыдущихъ параграфахъ, даетъ намъ возможность построить сколько угодно системъ координатъ и весьма легко, простыми вычисленіями, вывести основныя формулы, относящіяся къ каждой изъ этихъ системъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что по отношенію къ системѣ трехъ осей x,y,z всякій моторъ можетъ быть заданъ или его тремя проэкціями, или тремя составляющими. Какъ тѣ такъ и другія представляютъ комплексныя числа съ двумя единицами, и мы предполагали до сихъ поръ, что они выражены черезъ модуль умноженія и комплексное число ω, квадратъ котораго равняется кривизнѣ пространства:

$$\left.\begin{aligned} x&=X+\omega L,\ y=Y+\omega M,\ z=Z+\omega N,\\ a&=A+\omega P,\ b=B+\omega Q,\ c=C+\omega R,\end{aligned}\right\}\qquad(121)$$

Но ничто не мѣшаетъ намъ, взявъ какіе нибудь два совершенно произвольныхъ комплексныхъ числа

$$e_1=e_{11}+e_{12}\omega,\ e_2=e_{21}+e_{22}\omega,$$

которыя удовлетворяли бы условію

$$e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}\neq 0,$$

принять ихъ за новыя комплексныя единицы и черезъ нихъ выразить какъ проэкціи такъ и составляющія мотора; мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1e_1+x_2e_2,\ y=y_1e_1+y_2e_2,\ z=z_1e_1+z_2e_2,\\ a&=a_1e_1+a_2e_2,\ b=b_1e_1+b_2e_2,\ c=c_1e_1+c_2e_2,\end{aligned}\right\}\quad(122)$$

гдѣ $x_1,\ldots, x_2,\ldots, a_1,\ldots, a_2,\ldots$ опредѣляются изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} x_1e_{11}+x_2e_{21}&=X,\ y_1e_{11}+y_2e_{21}=Y,\ z_1e_{11}+z_2e_{21}=Z,\\ x_1e_{12}+x_2e_{22}&=L,\ y_1e_{12}+y_2e_{22}=M,\ z_1e_{12}+c_2e_{22}=N,\\ a_1e_{11}+a_2e_{21}&=A,\ b_1e_{11}+b_2e_{21}=B,\ c_1e_{11}+c_2e_{21}=C,\\ a_1e_{12}+a_2e_{22}&=P,\ b_1e_{12}+b_2e_{22}=Q,\ c_1e_{12}+c_2e_{22}=R.\end{aligned}\right\}\quad(123)$$

Такъ какъ числа x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 опредѣляютъ проэкціи мотора, а слѣдовательно и самый моторъ, и въ свою очередь опредѣляются, когда намъ данъ моторъ и его проэкціи, то мы можемъ принять ихъ за координаты мотора. На томъ же основаніи и числа a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 будутъ координатами мотора, которыя мы назовемъ союзными съ x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2. Итакъ каждой парѣ комплексныхъ чиселъ e_1 и e_2 соотвѣтствуетъ двѣ новыя системы координатъ. Въ томъ частномъ случаѣ, когда оси координатъ прямоугольны, проэкціи мотора равняются его составляющимъ, и координаты x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 становятся тожественными съ координатами a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 союзными съ ними.

Разсмотримъ какой геометрическій смыслъ имѣютъ новыя координаты.

Построимъ шесть моторовъ, у которыхъ осями служили бы координатныя оси x,y,z и тензорами, соотвѣтствующими направленіямъ этихъ осей, комплексныя числа e_1 и e_2, принятыя за комплексныя единицы:

мот. α_1 съ осью x и тенз. e_1; мот. α_2 съ осью x и тенз. e_2;
мот. β_1 съ осью y и тенз. e_1; мот. β_2 съ осью y и тенз. e_2;
мот. γ_1 съ осью z и тенз. e_1; мот. γ_2 съ осью z и тенз. e_2.

Эти шесть моторовъ мы назовемъ координатными моторами. Такъ какъ алгебраическая составляющая нашего мотора по

оси x есть $a=a_1e_1+a_2e_2$, то моторъ α—геометрическую составляющую по оси x—мы можемъ разсматривать какъ сумму двухъ моторовъ, для которыхъ ось x служитъ общею осью и числа a_1e_1 и a_2e_2—тензорами. Эти два мотора представляютъ собой произведенія моторовъ α_1 и α_2 на числа a_1 и a_2 и слѣдовательно

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2.$$

Подобнымъ же образомъ $\beta=b_1\beta_1+b_2\beta_2,$ (124)

$$\gamma=c_1\gamma_1+c_2\gamma_2,$$

гдѣ β и γ геометрическія составляющія нашего мотора ϱ по осямъ y и z. Такимъ образомъ a_1 и a_2 суть обыкновенныя числа, на которыя мы должны умножить координатные моторы α_1 и α_2 съ осью x для того, чтобы, сложивъ результаты, получить геометрическую составляющую мотора по оси x. Подобныя же значенія, какъ видно изъ равенствъ (124), имѣютъ и числа b_1,b_2,c_1,c_2, и потому координаты a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 мы можемъ назвать составляющими мотора по координатнымъ моторамъ. Сложивъ равенства (124), мы имѣемъ

$$\varrho=a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1+a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2,$$

откуда видно, что мотора ϱ можетъ быть полученъ, если координатные моторы умножимъ на координаты a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 мотора ϱ и результаты сложимъ.

Разложивъ алгебраическую проэкцію x на сумму двухъ чиселъ x_1e_1 и x_2e_2, мы вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ и геометрическую проэкцію мотора ϱ на ось x разложить на сумму двухъ моторовъ имѣющихъ ось x общею осью и числа x_1e_1 и x_2e_2 тензорами. Эти два мотора равны произведеніямъ координатныхъ моторовъ α_1 и α_2 на числа x_1 и x_2 соотвѣтственно и слѣдовательно проэкція мотора на ось x будетъ равняться суммѣ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$. Также и проэкціи мотора на оси y и z мы можемъ представить въ видѣ суммъ: $y_1\beta_1+y_2\beta_2$ и $z_1\gamma_1+z_2\gamma_2$. Такимъ образомъ координаты x_1 и x_2 суть числа, на которыя нужно умножить координатные моторы α_1 и α_2 съ осью x, чтобы, сложивъ результаты, получить геометрическую проэкцію мотора на ось x. Подобныя же значенія имѣютъ и координаты y_1 и y_2, z_1 и z_2, а потому координаты x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 мы можемъ назвать проэкціями мотора ϱ на координатные моторы.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда оси x,y,z пересѣкаются въ одной точкѣ o или лежатъ въ одной плоскости O, мы можемъ дать проэкціямъ и составляющимъ на координатныхъ моторахъ еще и другое толкованіе. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что оси пересѣкаются въ точкѣ o построимъ векторъ σ и роторъ $\mathfrak{C}$ мотора ϱ для точки приведенія o. Мы знаемъ, что X,Y,Z, суть проэкціи ротора $\mathfrak{C}$, а L,M,N—проэкціи вектора σ на координатныя оси; что же касается до координатъ A,B,C,P,Q,R, то ихъ геометрическое значеніе можно раскрыть слѣдующимъ образомъ. Построимъ три ротора $\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2,\mathfrak{C}_3$ и три вектора $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, которые лежатъ на координатныхъ осяхъ и имѣютъ числа A,B,C, и P,Q,R своими тензорами и направленія осей своими положительными направленіями. Очевидно, что моторы

$$\mathfrak{C}_1+\sigma_1,\ \mathfrak{C}_2+\sigma_2,\ \mathfrak{C}_3+\sigma_3$$

будутъ геометрическими составляющими мотора ϱ, а потому (§ 44_6) будемъ имѣть

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2+\mathfrak{C}_3$$
$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Отсюда видно, что A,B,C—алгебраическія составляющія ротора $\mathfrak{C}$, а P,Q,R—вектора σ. Такимъ образомъ когда координатныя оси пересѣкаются, то Y,Y,Z суть проэкціи, A,B,C составляющія ротора $\mathfrak{C}$, а L,M,N—проэкціи, P,Q,R—составляющія вектора σ, построенныхъ для точки приведенія, находящейся въ началѣ координатъ.

Изъ сказаннаго уже легко выводится и геометрическое значеніе координатъ, соотвѣтствующихъ новой системѣ единицъ e_1 и e_2. Означая черезъ $\mathfrak{P}$ роторъ эквиполентный съ векторомъ σ, построимъ два ротора Γ_1 и Γ_2 такъ, чтобы они удовлетворяли соотношеніямъ:

$$\left.\begin{aligned} e_{11}\Gamma_1+e_{21}\Gamma_2&=\mathfrak{C}\\ e_{12}\Gamma_1+e_{22}\Gamma_2&=\mathfrak{P}\end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

Сравненіе этихъ равенствъ съ равенствами (123) показываетъ, что x_1,y_1,z_1 — проэкціи, a_1,b_1,c_1 — составляющія ротора Γ_1, x_2,y_2,z_2—проэкціи, a_2,b_2,c_2—составляющія ротора Γ_2. Поэтому x_1e_1,y_1e_1,z_1e_1, a_1e_1,b_1e_1,c_1e_1 будутъ проэкціями и составляющими мотора Γ_1e_1, а x_2e_2,y_2e_2,z_2e_2, a_2e_2,b_2e_2,c_2e_2—проэкціями и составляющими мотора Γ_2e_2. Изъ равенствъ (125) слѣдуетъ, что

$$\varrho=\Gamma_1e_1+\Gamma_2e_2.$$

Такимъ образомъ въ томъ случаѣ, когда координатныя оси пересѣкаются въ одной точкѣ o, введеніе новыхъ комплексныхъ единицъ e_1 и e_2 соотвѣтствуетъ разложенію даннаго мотора на два, у которыхъ оси проходятъ черезъ начало координатъ и тензоры пропорціональны числамъ e_1 и e_2. Члены, на которые при этомъ разлагаются проэкціи и составляющія мотора суть проэкціи и составляющія этихъ моторовъ по координатнымъ осямъ. Къ подобнымъ же заключеніямъ мы пришли бы и въ томъ случаѣ, если бы оси координатъ всѣ лежали бы въ одной плоскости.

Чтобы изъ выведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ уравненій и формулъ извлечь основныя уравненія и формулы для новыхъ координатъ, мы должны прежде всего составить таблицу умноженія для единицъ e_1 и e_2 и получить выраженія для тригонометрическихъ функцій отъ комплексной перемѣнной въ системѣ (e_1, e_2) и затѣмъ поступать слѣдующимъ образомъ. Выразивъ всѣ комплексныя числа, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло, тензоры моторовъ, комплексные углы и т. д., явнымъ образомъ черезъ единицы e_1 и e_2, мы вносимъ ихъ въ данныя нами формулы и уравненія и совершаемъ указанныя въ нихъ дѣйствія. Въ результатѣ этихъ вычисленій всякая формула D и уравненіе $D=E$ примутъ видъ $D_1e_1+D_2e_2$ и $D_1e_1+D_2e_2=E_1e_1+E_2e_2$ и разобьются первая на двѣ формулы D_1 и D_2, второе на два уравненія $D_1=E_1$ и $D_2=E_2$. Такъ какъ D и E зависятъ отъ проэкцій и составляющихъ моторовъ по осямъ, то D_1, D_2, E_1, E_2 будутъ содержать проэкціи и составляющія моторовъ по шести координатнымъ моторамъ и будутъ слѣдовательно представлять собой нѣкоторыя формулы, относящіяся къ теоріи новыхъ координатъ. Называя аналитическій процессъ, помощью котораго мы переходимъ къ формуламъ D_1, D_2 и уравненіямъ $D_1=E_1$ и $D_2=E_2$ отъ формулы D и уравненія $D=E$ развертываніемъ этихъ послѣднихъ, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію. Основныя формулы и уравненія теоріи новыхъ координатъ, характеризуемыхъ системой комплексныхъ единицъ e_1 и e_2, мы получимъ изъ основныхъ формулъ, выведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, развертывая ихъ въ системѣ (e_1, e_2). Мы остановимся теперь на подробномъ изслѣдованіи тѣхъ системъ координатъ, которыя характеризуются двумя системами комплексныхъ единицъ:

1) $1, \omega \qquad \omega^2=\varkappa^2$

2) $\xi, \eta \qquad \xi^2=\xi,\ \xi\eta=0,\ \eta^2=\eta.$

72. **Преобразованіе координатъ.**—Полагая $e_1=1$ и $e_2=\omega$, мы возвращаемся снова къ единицамъ 1 и ω и къ прежнимъ выраженіямъ для проэкцій x,y,z и составляющихъ a,b,c мотора ϱ (121). Въ этомъ случаѣ координатные моторы $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$; $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ обращаются первые три въ роторы остальные три въ векторы, которые лежатъ на координатныхъ осяхъ и имѣютъ тензоры равные единицѣ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ называть координаты X,Y,Z,L,M,N также Plucker'овыми координатами.

Мы не будемъ разсматривать общаго случая преобразованія координатъ, соотвѣтствующихъ единицамъ 1 и ω, когда координатныя оси между собой не пересѣкаются, или, пересѣкаясь, не взаимно перпендикулярны, замѣчая, что формулы, относящіяся къ этимъ случаямъ выводятся развертываніемъ формулъ (97) и (98). Мы обратимъ наше вниманіе на простѣйшій случай, когда старыя и новыя оси образуютъ двѣ ортогональныя системы координаты. Пользуясь обозначеніями (121) и полагая

$$x'=X'+\omega L',\quad y'=Y'+\omega M',\quad z'=Z'+\omega N'$$

изъ (106) мы получаемъ формулы

$$\left.\begin{aligned}
X' &= \lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\varkappa^2(\xi_1 L+\eta_1 M+\zeta_1 N)\\
Y' &= \lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\varkappa^2(\xi_2 L+\eta_2 M+\zeta_2 N)\\
Z' &= \lambda_3 X+\mu_3 Y+\nu_3 Z+\varkappa^2(\xi_3 L+\eta_3 M+\zeta_3 N)\\
L' &= \xi_1 X+\eta_1 Y+\zeta_1 Z+\quad \lambda_1 L+\mu_1 M+\nu_1 N\\
M' &= \xi_2 X+\eta_2 Y+\zeta_2 Z+\quad \lambda_2 L+\mu_2 M+\nu_2 N\\
N' &= \xi_3 X+\eta_3 Y+\zeta_3 Z+\quad \lambda_3 L+\mu_3 M+\nu_3 N
\end{aligned}\right\}\qquad(126)$$

выражающія новыя координаты черезъ старыя, и

$$\left.\begin{aligned}
X &= \lambda_1 X'+\lambda_2 Y'+\lambda_3 Z'+\varkappa^2(\xi_1 L'+\xi_2 M'+\xi_3 N')\\
Y &= \mu_1 X'+\mu_2 Y'+\mu_3 Z'+\varkappa^2(\eta_1 L'+\eta_2 M'+\eta_3 N')\\
Z &= \nu_1 X'+\nu_2 Y'+\nu_3 Z'+\varkappa^2(\zeta_1 L'+\zeta_2 M'+\zeta_3 N')\\
L &= \xi_1 X'+\xi_2 Y'+\xi_3 Z'+\quad \lambda_1 L'+\lambda_2 M'+\lambda_3 N'\\
M &= \eta_1 X'+\eta_2 Y'+\eta_3 Z'+\quad \mu_1 L'+\mu_2 M'+\mu_3 N'\\
N &= \zeta_1 X'+\zeta_2 Y'+\zeta_3 Z'+\quad \nu_1 L'+\nu_2 M'+\nu_3 N'
\end{aligned}\right\}\qquad(127)$$

для обратнаго перехода отъ новыхъ координатъ къ старымъ. Формулы (107) и (108), будучи развернуты, даютъ намъ слѣдующія

соотношенія между $\lambda,\mu,\nu,\xi,\eta,\zeta$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2+\varkappa^2(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)&=1 \quad [3]\ (123)\\ \lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1+\nu_1\zeta_1&=0 \quad [3]\ (123)\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2+\varkappa^2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)&=0 \quad [3]\ (123)\\ \lambda_1\xi_2+\mu_1\eta_2+\nu_1\zeta_2+\lambda_2\xi_1+\mu_2\eta_1+\nu_2\zeta_1&=0 \quad [3]\ (123)\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Эти двѣнадцать соотношеній между собой независимы. Изъ нихъ мы выводимъ еще цѣлый рядъ соотношеній, которыя легко получаются развертываніемъ формулъ (109)—(113).

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\varkappa^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)&=1 \quad [3]\ (\lambda\mu\nu)(\xi\eta\zeta)\\ \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3&=0 \quad [3]\ (\lambda\mu\nu)(\xi\eta\zeta)\end{aligned}\right\} \quad (130)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3+\varkappa^2(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3)&=0 \quad [3]\ (\lambda\mu\nu)(\xi\eta\zeta)\\ \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_3\eta_3+\mu_1\xi_1+\mu_2\xi_2+\mu_3\xi_3&=0 \quad [3]\ (\lambda\mu\nu)(\xi\eta\zeta)\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2+\varkappa^2(\eta_2\zeta_3-\zeta_3\eta_2) \quad [3]\ (123)\\ \xi_1&=\mu_2\zeta_3-\mu_3\zeta_2+\nu_3\eta_2-\nu_2\eta_3 \quad [3]\ (\lambda\mu\nu)(\xi\eta\zeta)\end{aligned}\right\} \quad (132)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(\pm\lambda_1\mu_2\nu_3)+\varkappa^2\Sigma(\pm\lambda_1\eta_2\zeta_3)+\varkappa^2\Sigma(\pm\xi_1\mu_2\zeta_3)+\varkappa^2\Sigma(\pm\xi_1\eta_2\nu_3)&=1\\ \Sigma(\pm\lambda_1\mu_2\zeta_3)+\Sigma(\pm\lambda_1\eta_2\nu_3)+\Sigma(\pm\xi_1\mu_2\nu_3)+\varkappa^2\Sigma(\pm\xi_1\eta_2\zeta_3)&=0\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Замѣтимъ еще, что

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \varkappa^2\xi_1 & \varkappa^2\eta_1 & \varkappa^2\zeta_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \varkappa^2\xi_2 & \varkappa^2\eta_2 & \varkappa^2\zeta_2\\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & \varkappa^2\xi_3 & \varkappa^2\eta_3 & \varkappa^2\zeta_3\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\end{vmatrix}=1. \quad (134)$$

73. **Аутокомоментъ и аутомоментъ мотора.**—Въ теоріи координатъ, соотвѣтствующихъ системѣ комплексныхъ единицъ e_1 и e_2, весьма важную роль играютъ двѣ квадратичныя однородныя функціи координатъ, представляющія собой коэффиціенты при комплексныхъ единицахъ въ развернутомъ выраженіи квадрата тензора мотора. Эти функціи въ томъ случаѣ, когда мы пользуемся системой комплексныхъ единицъ $(1,\omega)$ носятъ названіе аутокомомента и аутомонента ротора. Такимъ образомъ

$$H^2=\text{аутк}_M(\varrho)+\omega\ \text{аутм}_M(\varrho)$$

гдѣ H есть тензоръ мотора ϱ. Обозначая

$$\text{аутк}_M(\varrho)=J_1,\ \text{аутм}_M(\varrho)=J_2,$$

т. е. полагая

$$H^2=J_1+\omega J_2,$$

мы получимъ для J_1 и J_2 нѣсколько различныхъ выраженій, смотря по тому, которой изъ формулъ (81), (82), (84) для вычисленій J_1 и J_2 мы воспользуемся и какова будетъ система осей, къ которой мы относимъ моторъ.

1. Развертывая ур. (81), мы получаемъ

$$\left.\begin{aligned} J_1&=XA+YB+ZC+\varkappa^2(LP+MQ+NR),\\ J_2&=XP+YQ+ZR+\ AL\ +BM+CN,\end{aligned}\right\} \quad (135)$$

простѣйшія выраженія для J_1 и J_2 черезъ составляющія и проэкціи мотора ϱ по координатнымъ моторамъ.

2. Развертывая ур. (82) получаемъ

$$J_1=\left\{\begin{aligned} &A^2+B^2+C^2+2\lambda_1 BC+2\mu_1 CA+2\nu_1 AB\\ &+2\varkappa^2 A\,(\ *\ +Q\nu_{11}+R\mu_{11})\\ &+2\varkappa^2 B\,(P\nu_{11}+\ *\ +R\lambda_{11})\\ &+2\varkappa^2 C\,(P\mu_{11}+Q\lambda_{11}+\ *\ )\\ &+\varkappa^2(P^2+Q^2+R^2+2\lambda_1 QR+2\mu_1 RP+2\nu_1 PQ)\end{aligned}\right. \quad (136)$$

$$J_2=\left\{\begin{aligned} &2A\,(P+Q\nu_1+R\mu_1)+2\lambda_{11}(BC+\varkappa^2 QR)\\ &+2B(P\nu_1+Q\ +R\lambda_1)+2\mu_{11}(CA+\varkappa^2 RP)\\ &+2C(P\mu_1+Q\lambda_1+R\ )+2\nu_{11}(AB+\varkappa^2 PQ)\end{aligned}\right. \quad (137)$$

выраженія для J_1 и J_2 въ функціяхъ однихъ только составляющихъ мотора.

3. Наконецъ, полагая

$$\Delta_{ik}:\Delta=g_{ik}+h_{ik}\omega \qquad i,k=1,2,3$$

и развертывая уравненіе (84), получаемъ

$$J_1=\left\{\begin{aligned} &g_{11}X^2+g_{22}Y^2+g_{33}Z^2+2g_{23}YZ+2g_{31}ZX+2g_{12}XY\\ &+2\varkappa^2 X\,(h_{11}L+h_{12}M+h_{13}N)\\ &+2\varkappa^2 Y\,(h_{21}L+h_{22}M+h_{23}N)\\ &+2\varkappa^2 Z\,(h_{31}L+h_{32}M+h_{33}N)\\ &+\ \varkappa^2(g_{11}L^2+g_{22}M^2+g_{33}N^2+2g_{23}MN+2g_{31}NL+2g_{12}LM)\end{aligned}\right. \quad (138)$$

$$J_2=\left\{\begin{aligned} &h_{11}X^2+h_{22}Y^2+h_{33}Z^2+2h_{23}YZ+2h_{31}ZX+2h_{12}XY\\ &+2\,X(g_{11}L+g_{12}M+g_{13}N)\\ &+2\,Y(g_{21}L+g_{22}M+g_{23}N)\\ &+2\,Z(g_{31}L+g_{32}M+g_{33}N)\\ &+\ \varkappa^2(h_{11}L^2+h_{22}M^2+h_{33}N^2+2h_{23}MN+2h_{31}NL+2h_{12}LM)\end{aligned}\right. \quad (139)$$

—выраженія для J_1 и J_2 черезъ одни только проэкціи мотора.

4. Если оси координатъ проходятъ черезъ одну и ту же точку или всѣ лежатъ въ одной плоскости, то $\lambda_{11}=\mu_{11}=\nu_{11}=0$, $h_{ik}=0$ $(i,k=1,2,3)$ и формулы для J_1 и J_2 значительно упрощаются.

5. Пусть σ—векторъ, C—роторъ мотора o для точки приведенія o въ которой пересѣкаются оси координатъ (плоскости приведенія O, въ которой лежатъ координатныя оси). Такъ какъ X,Y,Z,A,B,C суть проэкціи и составляющія ротора C по координатнымъ осямъ (§ 71), а L,M,N,P,Q,R—проэкціи и составляющія вектора σ по тѣмъ же осямъ, то

$$R'^2=AX+BY+CZ,$$
$$G'^2=LP+MQ+NR,$$
$$R'G'\cos\varphi=XP+YQ+ZR=AL+BM+CN,$$

гдѣ R' и G' суть тензоры C и σ, φ—уголъ между осью C и лучомъ σ, и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} J_1&=R'^2+\varkappa^2G'^2,\\ J_2&=2R'G'\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

6. Если оси координатъ прямоугольны, то

$$X=A,\ Y=B,\ Z=C,\ L=P,\ M=Q,\ N=R,$$

и выраженія (135) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} J_1&=X^2+Y^2+Z^2+\varkappa^2(L^2+M^2+N^2)\\ J_2&=2\,(XL+YM+ZN) \end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

Такъ какъ (136), (137), (138), (139) были получены нами изъ уравненій (82) и (84), которыя представляютъ H^2, первое—въ функціи комплексныхъ чиселъ a,b,c, второе—въ функціи комплексныхъ чиселъ x,y,z, то мы должны имѣть соотношенія

$$\frac{\partial J_1}{\partial A}=\frac{\partial J_2}{\partial P},\ \frac{\partial J_1}{\partial B}=\frac{\partial J_2}{\partial Q},\ \frac{\partial J_1}{\partial C}=\frac{\partial J_2}{\partial R},$$
$$\frac{\partial J_1}{\partial P}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial A},\ \frac{\partial J_1}{\partial Q}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial B},\ \frac{\partial J_1}{\partial R}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial C},$$

гдѣ J_1 и J_2 должны быть выражены черезъ составляющія A,B,C,P,Q,R по формуламъ (136) и (137), и

$$\frac{\partial J_1}{\partial X}=\frac{\partial J_2}{\partial L},\ \frac{\partial J_1}{\partial Y}=\frac{\partial J_2}{\partial M},\ \frac{\partial J_1}{\partial Z}=\frac{\partial J_2}{\partial N},$$
$$\frac{\partial J_1}{\partial L}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial X},\ \frac{\partial J_1}{\partial M}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial Y},\ \frac{\partial J_1}{\partial N}=\varkappa^2\frac{\partial J_2}{\partial Z},$$

гдѣ J_1 и J_2 должны быть выражены черезъ проэкціи X,Y,Z,L,M,N по формуламъ (138) и (139). И дѣйствительно эти соотношенія легко повѣряются.

Теорема.—*Функціи J_1 и J_2 представляютъ собой инваріанты.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что число H^2 не зависитъ отъ выбора координатныхъ осей, отъ выбора осей не зависятъ поэтому и J_1 и J_2.

Слѣдствіе.—Величины $R'^2+\varkappa^2G'^2$ и $R'G'\cos\varphi$ не зависятъ отъ положенія точки или плоскости приведенія мотора ϱ (C,σ), ибо эти величины равны J_1 и J_2 соотвѣтственно.

74. **Зависимость между проэкціями и составляющими мотора.**— Пользуясь выраженіями для аутокомомента J_1 и аутомомента J_2, мы можемъ въ весьма простой формѣ представить зависимость между проэкціями X,Y,Z,L,M,N и составляющими мотора A,B,C,P,Q,R. Замѣчая, что по свойству производной отъ функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\frac{\partial H^2}{\partial a}=\frac{\partial(J_1+\omega J_2)}{\partial a}=\frac{\partial J_1}{\partial A}+\omega\frac{\partial J_2}{\partial A},$$
$$\frac{\partial H^2}{\partial b}=\frac{\partial(J_1+\omega J_2)}{\partial b}=\frac{\partial J_1}{\partial B}+\omega\frac{\partial J_2}{\partial B},$$
$$\frac{\partial H^2}{\partial c}=\frac{\partial(J_1+\omega J_2)}{\partial c}=\frac{\partial J_1}{\partial C}+\omega\frac{\partial J_2}{\partial C},$$

мы легко выводимъ, развертывая формулы (76),

$$\left.\begin{aligned} X&=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial A},\quad Y=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial B},\quad Z=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial C}\\ L&=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial A},\quad M=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial B},\quad N=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial C}\end{aligned}\right\}\qquad(142)$$

гдѣ J_1 и J_2 должны быть выражены, конечно, черезъ составляющія A,B,C,P,Q,R. Написавъ подробнѣе вторыя части,

увидимъ, что опредѣлитель этихъ уравненій равняется Δ_0 (см. § 82) и стало быть отличенъ отъ нуля. Мы можемъ поэтому уравненія (142) рѣшить относительно составляющихъ и получить такимъ образомъ выраженія этихъ послѣднихъ черезъ проэкціи. Эти выраженія мы выводимъ проще всего прямо развертывая равенства (77) такъ, какъ только что развернули (76); мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} A&=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial X},\quad B=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial Y},\quad C=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_1}{\partial Z},\\ P&=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial X},\quad Q=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial Y},\quad R=\tfrac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial Z},\end{aligned}\right\}\qquad (143)$$

гдѣ J_1 и J_2 конечно должны быть выражены черезъ проэкціи X,Y,Z,L,M,N. Пользуясь соотношеніями между производными J_1 и J_2 (§ 73), мы можемъ, если угодно, во вторыхъ частяхъ равенствъ (142) и (143) ввести производныя какой нибудь одной изъ функцій J_1 и J_2. Изъ равенствъ (142) и (143) видно, что форма (138) союзна съ (136), а (139)— съ (137).

75. **Относительный комоментъ и моментъ моторовъ.**— Вещественная часть геометрическаго произведенія двухъ моторовъ носитъ названіе относительнаго комомента, а коэффиціентъ при ω—относительнаго момента моторовъ. Такимъ образомъ

$$\overline{\varrho\varrho_1}=\text{км}(\varrho\varrho_1)+\omega\,\text{мм}(\varrho\varrho_1).$$

Такъ какъ въ частномъ случаѣ, когда $\varrho=\varrho_1$, геометрическое произведеніе моторовъ ϱ и ϱ_1 обращается въ квадратъ тензора ϱ, то при $\varrho=\varrho_1$ относительный комоментъ и моментъ моторовъ ϱ и ϱ_1 обращаются соотвѣтственно въ аутокомоментъ и аутомоментъ ϱ. Отсюда и происходятъ эти послѣдніе термины.

Чтобы получить рядъ выраженій для относительнаго комомента и момента двухъ моторовъ, намъ стоитъ только развернуть тѣ формулы, которыя мы вывели въ § 65. Полагая

$$\begin{aligned} x_1&=X_1+\omega L_1,\quad y_1=Y_1+\omega M_1,\quad z_1=Z_1+\omega N_1,\\ a_1&=A_1+\omega P_1,\quad b_1=B_1+\omega Q_1,\quad c_1=C_1+\omega R_1,\end{aligned}$$

мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ формуламъ.

1. Развертывая (87), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \text{км}(\varrho\varrho_1)&=XA_1+YB_1+ZC_1+\varkappa^2(LP_1+MQ_1+NR),\\ \text{мм}(\varrho\varrho_1)&=XP_1+YQ_1+ZR_1+\quad LA_1+MB_1+NC_1,\end{aligned}\right\}\quad(144)$$

или

$$\begin{aligned} \text{км}(\varrho\varrho_1)&=X_1A+Y_1B+Z_1C+\varkappa^2(L_1P+M_1Q+N_1R),\\ \text{мм}(\varrho\varrho_1)&=X_1P+Y_1Q+Z_1R+\quad L_1A+M_1B+N_1C.\end{aligned}$$

Это самыя простыя выраженія для относительнаго комомента и момента двухъ моторовъ отчасти черезъ проэкціи отчасти черезъ составляющія моторовъ.

2. Внеся въ (144) вмѣсто X,Y,Z,L,M,N ихъ выраженія (142), или прямо развертывая (88), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} 2\text{км}(\varrho\varrho_1)&=A_1\frac{\partial J_1}{\partial A}+B_1\frac{\partial J_1}{\partial B}+C_1\frac{\partial J_1}{\partial C}+P_1\frac{\partial J_1}{\partial P}+Q_1\frac{\partial J_1}{\partial Q}+R_1\frac{\partial J_1}{\partial R},\\ 2\text{мм}(\varrho\varrho_1)&=A_1\frac{\partial J_2}{\partial A}+B_1\frac{\partial J_2}{\partial B}+C_1\frac{\partial J_2}{\partial C}+P_1\frac{\partial J_2}{\partial P}+Q_1\frac{\partial J_2}{\partial Q}+R_1\frac{\partial J_2}{\partial R},\end{aligned}\right\}\quad(145)$$

выраженія комомента и момента моторовъ ϱ и ϱ_1 черезъ ихъ составляющія.

3. Развертывая (90), или пользуясь (144) и (143), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} 2\text{км}(\varrho\varrho_1)&=X_1\frac{\partial J_1}{\partial X}+Y_1\frac{\partial J_1}{\partial Y}+Z_1\frac{\partial J_1}{\partial Z}+L_1\frac{\partial J_1}{\partial L}+M_1\frac{\partial J_1}{\partial M}+N_1\frac{\partial J_1}{\partial N},\\ 2\text{мм}(\varrho\varrho_1)&=X_1\frac{\partial J_2}{\partial X}+Y_1\frac{\partial J_2}{\partial Y}+Z_1\frac{\partial J_2}{\partial Z}+L_1\frac{\partial J_2}{\partial L}+M_1\frac{\partial J_2}{\partial M}+N_1\frac{\partial J_2}{\partial N},\end{aligned}\right\}\quad(146)$$

выраженія комомента и момента моторовъ ϱ и ϱ_1 черезъ ихъ проэкціи. Разсматривая выраженія (145) и (146) для относительнаго комомента и момента двухъ моторовъ мы видимъ, что они представляютъ собой билинейныя формы поляризированныя изъ формъ J_1 и J_2.

4. Если оси x,y,z пересѣкаются въ одной точкѣ o (лежатъ въ одной плоскости O), которая служитъ точкой (плоскостью) приведенія для обоихъ моторовъ $\varrho(\mathrm{G},\sigma)$ и $\varrho_1(\mathrm{G}_1,\sigma_1)$; то A_1,B_1,C_1,P_1,Q_1,R_1 представляютъ собой составляющія ротора G_1 и вектора σ_1, а X,Y,Z,L,M,N—проэкціи ротора G

и вектора σ. Поэтому

$$\begin{aligned}
\text{км}(GG_1) &= XA_1 + YB_1 + ZC_1, \\
\text{км}(\sigma\sigma_1) &= \varkappa^2(LP_1 + MQ_1 + NR_1), \\
\text{мм}(G\sigma_1) &= XP_1 + YQ_1 + ZR_1, \\
\text{мм}(G_1\sigma) &= LA_1 + MB_1 + NC_1,
\end{aligned}$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}
\text{км}(\varrho\varrho_1) &= \text{км}(GG_1) + \text{км}(\sigma\sigma_1), \\
\text{мм}(\varrho\varrho_1) &= \text{мм}(G\sigma_1) + \text{мм}(G_1\sigma),
\end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

т. е. если моторы ϱ и ϱ_1 имѣютъ общую точку или плоскость приведенія, то относительный комоментъ ихъ равняется относительному комоменту ихъ роторовъ сложенному съ относительнымъ комоментомъ ихъ векторовъ, а относительный моментъ—суммѣ относительныхъ моментовъ каждаго изъ роторовъ съ каждымъ изъ векторовъ.

5. Если система осей прямоугольна, то составляющія ротора G_1 и вектора σ_1 равняются ихъ проэкціямъ и формулы (144) принимаютъ болѣе простой видъ

$$\left.\begin{aligned}
\text{км}(\varrho\varrho_1) &= XX_1 + YY_1 + ZZ_1 + \varkappa^2(LL_1 + MM_1 + NN_1), \\
\text{мм}(\varrho\varrho_1) &= XL_1 + YM_1 + ZN_1 + X_1L + Y_1M + Z_1N.
\end{aligned}\right\} \qquad (148)$$

6. Предполагая, что моторы ϱ и ϱ_1 имѣютъ оси и полагая

$$H = R + \omega G, \quad H_1 = R_1 + \omega G_1, \quad \vartheta = \theta + \omega\delta,$$

развертываніемъ формулы (86), мы получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
\text{км}(\varrho\varrho_1) &= (RR_1 + \varkappa^2 GG_1)\cos\theta\cos\varkappa\delta + \varkappa(R_1G + RG_1)\sin\theta\sin\varkappa\delta \\
\text{мм}(\varrho\varrho_1) &= \tfrac{1}{\varkappa}(RR_1 + \varkappa^2 GG_1)\sin\theta\sin\varkappa\delta + (R_1G + RG_1)\cos\theta\cos\varkappa\delta
\end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

Сравнивая послѣднія формулы съ (144), имѣемъ

$$(RR_1 + \varkappa^2 GG_1)\cos\theta\cos\varkappa\delta + \varkappa(RG_1 + R_1G)\sin\theta\sin\varkappa\delta = XA_1 + YB_1 + ZC_1 + \varkappa^2(LP_1 + MQ_1 + NR_1), \qquad (150)$$

$$\tfrac{1}{\varkappa}(RR_1 + \varkappa^2 GG_1)\sin\theta\sin\varkappa\delta + (RG_1 + R_1G)\cos\theta\cos\varkappa\delta = XP_1 + YQ_1 + ZR_1 + LA_1 + MB_1 + NC_1. \qquad (151)$$

Теорема.—*Относительные комоментъ и моментъ двухъ моторовъ представляютъ собой пнваріанты.*

И въ самомъ дѣлѣ они равняются воэффиціентамъ геометрическаго произведенія двухъ моторовъ, которое, какъ было показано въ § 68, не зависитъ отъ выбора координатныхъ осей.

Слѣдствіе.—Суммы

$$\text{км}(CC_1)+\text{км}(\sigma\sigma_1),\ \text{мм}(C\sigma_1)+\text{мм}(C_1\sigma)$$

не зависятъ отъ положенія общей для обоихъ моторовъ точки или плоскости приведенія, ибо они равняются соотвѣтственно относительному комоменту и моменту моторовъ.

76. **Комоменты и моменты системы моторовъ.**—Относительнымъ комоментомъ двухъ системъ моторовъ $S(\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_n)$ и $F(\beta_1,\beta_2,..\beta_m)$ называется сумма относительныхъ комоментовъ каждаго изъ моторовъ первой системы по отношенію къ каждому изъ моторовъ второй, т. е.

$$\text{км}(SF)=\sum_{ik}\text{км}(\alpha_i\beta_k) \qquad (152)$$

распространенной на всѣ значенія i отъ 1 до n и k отъ 1 до m.

Относительнымъ моментомъ двухъ системъ моторовъ $S(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$ и $F(\alpha_1,\beta_2,...\beta_m)$ называется сумма относительныхъ моментовъ каждаго изъ моторовъ первой системы по отношенію къ каждому изъ моторовъ второй, т. е.

$$\text{мм}(SF)=\sum_{ik}\text{мм}(\alpha_i\beta_k) \qquad (153)$$

распространенной на всѣ значенія i отъ 1 до n и k отъ 1 до m.

Аутокомоментомъ системы $S(\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_n)$ называется сумма комоментовъ каждаго изъ моторовъ системы по отношенію къ самому себѣ и къ каждому другому мотору той же системы, т. е.

$$\text{ауткм}(S)=\sum_{ik}\text{км}(\alpha_i\alpha_k) \qquad (154)$$

распространенной на всѣ значенія i и k отъ 1 до n.

Аутомоментомъ системы $S(\alpha_1,\alpha_1,..\alpha_n)$ называется сумма моментовъ каждаго изъ моторовъ системы по отношенію къ самому себѣ и къ каждому другому мотору той же системы, т. е.

$$\text{аутмм}(S)=\sum_{ik}\text{мм}(\alpha_i\alpha_k) \qquad (155)$$

распространенной на всѣ значенія i и k отъ 1 до n.

Когда $\alpha_i=\beta_i$ и $m=n$, такъ что система S тожественна съ F, то, сравнивая формулы (154) и (155) съ (152) и (153) мы видимъ, что

$$\text{ауткм}(S)=\text{км}(SS),\ \text{аутмм}(S)=\text{мм}(SS).$$

Такимъ образомъ, когда двѣ системы S и F становятся тожественными относительный комоментъ (моментъ) ихъ обращается въ аутокомоментъ (аутомоментъ) системы S; отсюда происхожденіе этихъ двухъ послѣднихъ терминовъ.

Теорема.

Если система моторовъ $S(\alpha_1,\alpha_2,...)$ эквивалентна мотору α и система моторовъ $F(\beta_1,\beta_2,..)$ эквивалентна мотору β, то относительный комоментъ моторовъ α и β равняется относительному комоменту системъ S и F.

Если система моторовъ $S(\alpha_1,\alpha_2,...)$ эквивалентна мотору α и система моторовъ $F(\beta_1,\beta_2,...)$ эквивалентна мотору β, то относительный моментъ моторовъ α и β равняется относительному моменту системъ S и F.

Въ самомъ дѣлѣ, по свойству дистрибутивности геометрическаго умноженія изъ равенствъ

$$\alpha=\sum\alpha_i,\ \beta=\sum\beta_k,$$

выражающихъ эквивалентность моторовъ α и β съ системами S и F, слѣдуетъ

$$\overline{\alpha\beta}=\sum_{ik}\overline{\alpha_i\beta_k}$$

Но

$$\overline{\alpha\beta}=\text{км}\,(\alpha\beta)\ +\omega\text{мм}(\alpha\beta),$$

$$\overline{\alpha_i\beta_k}=\text{км}\,(\alpha_i\beta_k)\ +\omega\text{мм}(\alpha_i\beta_k),$$

а потому послѣднее равенство разложится на два

$$\text{км}(\alpha\beta)=\sum_{ik}\text{км}(\alpha_i\beta_k)=\text{км}(SF),$$

$$\text{мм}(\alpha\beta)=\sum_{ik}\text{мм}(\alpha_i\beta_k)=\text{мм}(SF),$$

которыя и доказываютъ теорему.

Слѣдствіе I.—Если системы моторовъ F и S эквивалентны соотвѣтственно системамъ F' и S', то

$$\text{км}(SF)=\text{км}(S'F'),\qquad \text{мм}(SF)=\text{мм}(S'F').$$

Ибо моторы α и β эквивалентные системамъ S и F будутъ эквивалентны и системамъ S' и F', и по доказанной теоремѣ мы будемъ имѣть

$$\text{км}(SF)=\text{км}(\alpha\beta)=\text{км}(S'F'),$$
$$\text{мм}(SF)=\text{мм}(\alpha\beta)=\text{мм}(S'F').$$

Слѣдствіе II.—Когда система S тожественна съ F' и S'—съ F, то

$$\text{ауткм}(S)=\text{км}(SF)=\text{км}(S'F')=\text{ауткм}(S')$$
$$\text{аутмм}(S)=\text{мм}(SF)=\text{мм}(S'F')=\text{аутмм}(S').$$

Итакъ, если системы S и S' эквивалентны, то аутокомоментъ (аутомоментъ) первой равняется аутокомоменту (аутомоменту) второй.

Мы не будемъ останавливаться на подробномъ изслѣдованіи оставшихся не разсмотрѣнными нами двухъ инваріантовъ—векторнаго произведенія двухъ моторовъ и произведенія мотора на число, предоставляя самому читателю заняться развертываніемъ формулъ (120) и опредѣленіемъ зависимости между координатами мотора ϱ и произведенія ϱ на число s, и перейдемъ теперь къ изученію весьма замѣчательной системы координатъ, соотвѣтствующей системѣ чиселъ ξ и η.

77. **Координаты въ системѣ** (ξ,η).—Принимая за комплексныя единицы числа ξ и η, которыя, напомнимъ, связаны съ модулемъ операціи умноженія и числомъ ω соотношеніями

$$\xi=\frac{\varkappa+\omega}{2\varkappa},\ \xi+\eta=1,$$

$$\eta=\frac{\varkappa-\omega}{2\varkappa},\ \xi-\eta=\frac{\omega}{\varkappa},$$

мы имѣемъ

$$x=\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{L}\eta,\quad g=\mathfrak{Y}\xi+\mathfrak{M}\eta,\quad z=\mathfrak{Z}\xi+\mathfrak{N}\eta$$
$$a=\mathfrak{A}\xi+\mathfrak{P}\eta,\quad b=\mathfrak{B}\xi+\mathfrak{Q}\eta,\quad c=\mathfrak{C}\xi+\mathfrak{R}\eta$$

гдѣ
$$\mathfrak{X}=X+\varkappa L,\quad \mathfrak{Y}=Y+\varkappa M,\quad \mathfrak{Z}=Z+\varkappa N, \tag{156}$$
$$\mathfrak{L}=X-\varkappa L,\quad \mathfrak{M}=Y+\varkappa M,\quad \mathfrak{N}=Z-\varkappa N, \tag{157}$$
$$\mathfrak{A}=A+\varkappa P,\quad \mathfrak{B}=B+\varkappa Q,\quad \mathfrak{C}=C+\varkappa R, \tag{158}$$
$$\mathfrak{P}=A-\varkappa P,\quad \mathfrak{Q}=B-\varkappa Q,\quad \mathfrak{R}=C-\varkappa R, \tag{159}$$

Числа
$$\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N};\ \mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R} \tag{160}$$

представляютъ собой координаты мотора ϱ, отвѣчающія системѣ (ξ,η), первыя шесть суть проэкціи, а вторыя шесть—составляющія мотора ϱ по координатнымъ моторамъ, каковыми теперь являются шесть моторовъ, имѣющихъ оси координатъ своими осями и числа ξ и η своими тензорами. Въ томъ случаѣ, когда оси координатъ всѣ проходятъ черезъ одну и ту же точку o или лежатъ въ одной плоскости O, какъ было показано въ § 71, координаты имѣютъ еще другое значеніе, а именно, если $\mathfrak{G}$ и σ суть роторъ и векторъ ϱ для начала координатъ o (для начальной плоскости координатъ O), то (156) и (158) представляютъ собой проэкціи и составляющія ротора

$$\varrho_\xi=\mathfrak{G}+\frac{\omega}{\varkappa}\sigma,$$

а (157) и (159) проэкціи и составляющія ротора

$$\varrho_\eta=\mathfrak{G}-\frac{\omega}{\varkappa}\sigma.$$

Обращаясь къ изслѣдованію координатъ, отвѣчающихъ системѣ комплексныхъ чиселъ ξ и η, мы замѣтимъ прежде всего, что аналитическая операція развертыванія формулъ въ этой системѣ, благодаря простотѣ таблицы умноженія

$$\xi^2=\xi,\ \xi\eta=0,\ \eta^2=\eta,$$

не представляетъ никакихъ затрудненій. Въ тѣхъ случаяхъ, когда комплексныя числа, входящія въ наши формулы, выражены явно черезъ 1 и ω, развернутыя формулы въ системѣ

(ξ,η) могутъ быть написаны прямо безъ вычисленій. Дѣйствительно, припоминая, что

$$f(g,h,\ldots) = f(g_1 + \omega g_2,\ h_1 + \omega h_2,..) =$$
$$= f(g_1 + \varkappa g_2,\ h_1 + \varkappa h_2,..)\xi + f(g_1 - \varkappa g_2,\ h_1 - \varkappa h_2,\ldots)\eta,$$
$$F(g,h,\ldots) = F(g_1 + \omega g_2,\ h_1 + \omega h_2,..) =$$
$$= F(g_1 + \varkappa g_2,\ h_1 + \varkappa h_2,..)\xi + F(g_1 - \varkappa g_1,\ h_1 - \varkappa h_2,\ldots)\eta,$$

гдѣ f и F какія нибудь функціи комплексныхъ перемѣнныхъ $g,h,\ldots$, мы видимъ, что формула f или уравненіе $f=F$, содержащія комплексныя числа $g,h,..$, развертываются, первая—въ двѣ формулы

$$f(g_1 + \varkappa g_2,\ h_1 + \varkappa h_2,\ldots),\ f(g_1 - \varkappa g_2,\ h_1 - \varkappa h_2,\ldots)$$

второе—въ два уравненія

$$f(g_1 + \varkappa g_2,\ h_1 + \varkappa h_2,\ldots) = F(g_1 + \varkappa g_2,\ h_1 + \varkappa h_2,\ldots)$$
и $$f(g_1 - \varkappa g_2,\ h_1 - \varkappa h_1,\ldots) = F(g_1 - \varkappa g_2,\ h_1 - \varkappa h_1,\ldots).$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующее весьма простое правило: нужно только комплексныя числа, входящія въ неразвернутыя формулы и уравненія, выразить явнымъ образомъ черезъ единицы 1 и ω и замѣнить потомъ одинъ разъ ω черезъ $+\varkappa$, а въ другой разъ черезъ $-\varkappa$, чтобы получить соотвѣтствующія развернутыя формулы и уравненія въ системѣ комплексныхъ единицъ ξ,η.

Благодаря простотѣ этого правила, намъ нѣтъ надобности подробно останавливаться на развертываніи всѣхъ выведенныхъ нами формулъ: мы развернемъ только тѣ, которыя намъ понадобятся для изслѣдованія новой системы координатъ.

78. **Стрѣлки мотора.**—Пусть $\mathfrak{G}$ и σ суть роторъ и векторъ мотора ϱ какой нибудь точки приведенія o (плоскости приведенія O). Роторы

$$\varrho_\xi = \mathfrak{G} + \frac{\omega}{\varkappa}\sigma,\ \varrho_\eta = \mathfrak{G} - \frac{\omega}{\varkappa}\sigma,$$

оси которыхъ очевидно проходятъ черезъ точку o (лежатъ въ плоскости O) назовемъ стрѣлками мотора ϱ для точки o (плоскости O), первый изъ нихъ назовемъ ξ-стрѣлкой, вто-

рой—η-стрѣлкой. Замѣчая, что роторъ $\mathfrak{C}'=\omega\sigma/\varkappa$ эквіангармониченъ (§ 69_3) съ векторомъ σ, мы весьма просто можемъ для даннаго мотора построить его стрѣлки. Въ свою очередь по даннымъ стрѣлкамъ можно построить моторъ, ибо

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2}(\rho_\xi+\rho_\eta)\,,\quad \sigma=\frac{\omega}{2\varkappa}(\rho_\xi-\rho_\eta)$$
$$\rho=\mathfrak{C}+\sigma=\rho_\xi\xi+\rho_\eta\eta.$$

Въ томъ случаѣ, когда оси координатъ проходятъ черезъ одну и ту же точку o (лежатъ въ одной плоскости O), координаты (160) представляютъ собой, какъ мы упоминали въ предыдущемъ параграфѣ, проэкціи и составляющія по координатнымъ осямъ стрѣлокъ мотора, построенныхъ для начала координатъ (начальной плоскости координатъ). Чтобы раскрыть зависимость между координатами и стрѣлками, когда координатныя оси между собой не пересѣкаются, мы должны изслѣдовать свойства стрѣлокъ.

Посмотримъ сначала, какъ измѣняются стрѣлки съ измѣненіемъ положенія точки (плоскости) приведенія, иначе говоря посмотримъ, въ какомъ отношеніи находятся стрѣлки для двухъ различныхъ точекъ приведенія o и o' (плоскостей приведенія O и O'). Съ этою цѣлью примемъ точки o и o' (плоскости O и O') за начала двухъ прямоугольныхъ системъ координатъ x,y,z и x',y',z'. Развертывая (106), (109), (110), мы получаемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}'&=(\lambda_1+\varkappa\xi_1)\mathfrak{X}+(\mu_1+\varkappa\eta_1)\mathfrak{Y}+(\nu_1+\varkappa\zeta_1)\mathfrak{Z},\\ \mathfrak{Y}'&=(\lambda_2+\varkappa\xi_2)\mathfrak{X}+(\mu_2+\varkappa\eta_2)\mathfrak{Y}+(\nu_2+\varkappa\zeta_2)\mathfrak{Z},\\ \mathfrak{Z}'&=(\lambda_3+\varkappa\xi_3)\mathfrak{X}+(\mu_3+\varkappa\eta_3)\mathfrak{Y}+(\nu_3+\varkappa\zeta_3)\mathfrak{Z},\end{aligned}\right\}\quad(161)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L}'&=(\lambda_1-\varkappa\xi_1)\mathfrak{L}+(\mu_1-\varkappa\eta_1)\mathfrak{M}+(\nu_1-\varkappa\zeta_1)\mathfrak{N},\\ \mathfrak{M}'&=(\lambda_2-\varkappa\xi_2)\mathfrak{L}+(\mu_2-\varkappa\eta_2)\mathfrak{M}+(\nu_3-\varkappa\zeta_2)\mathfrak{N},\\ \mathfrak{N}'&=(\lambda_3-\varkappa\xi_3)\mathfrak{L}+(\mu_3-\varkappa\eta_3)\mathfrak{M}+(\nu_3-\varkappa\zeta_3)\mathfrak{N},\end{aligned}\right\}\quad(162)$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1+\varkappa\xi_1)^2+(\lambda_2+\varkappa\xi_2)^2+(\lambda_3+\varkappa\xi_3)^2&=1,\\ (\lambda_1-\varkappa\xi_1)^2+(\lambda_2-\varkappa\xi_2)^2+(\lambda_3-\varkappa\xi_3)^2&=1,\\ (\lambda_1+\varkappa\xi_1)(\mu_1+\varkappa\eta_1)+(\lambda_2+\varkappa\xi_2)(\mu_2+\varkappa\eta_2)+(\lambda_3+\varkappa\xi_3)(\mu_3+\varkappa\eta_3)&=0,\\ (\lambda_1-\varkappa\xi_1)(\mu_1-\varkappa\eta_1)+(\lambda_2-\varkappa\xi_2)(\mu_2-\varkappa\eta_2)+(\lambda_3-\varkappa\xi_3)(\mu_3-\varkappa\eta_3)&=0,\end{aligned}\right\}(163)$$

въ которыхъ $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ суть проэкціи стрѣлокъ ρ_ξ и ρ_η для точки o (плоскости O) на оси x,y,z, а $\mathfrak{X}',\mathfrak{Y}',\mathfrak{Z}',\mathfrak{L}',\mathfrak{M}',\mathfrak{N}'$—

проэкціи стрѣлокъ ϱ_ξ' и ϱ_η' для точки o' (плоскости O') на оси x', y', z'. Эти замѣчательныя ур. показываютъ намъ во-первыхъ, что каждая изъ стрѣлокъ ϱ_ξ' и ϱ_η' для точки o' (плоскости O') зависитъ только отъ той изъ стрѣлокъ ϱ_ξ и ϱ_η для точки o (плоскости O), которая съ ней одноименна и нисколько не зависитъ отъ другой и, во-вторыхъ, что преобразованія проэкцій ϱ_ξ и ϱ_η въ проэкціи ϱ_ξ' и ϱ_η' представляютъ собой ортогональныя преобразованія. Поэтому замѣчая, что

$$T^2(\varrho_\xi)=\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2,\quad T^2(\varrho_\xi')=\mathfrak{X}'^2+\mathfrak{Y}'^2+\mathfrak{Z}'^2,$$
$$T^2(\varrho_\eta)=\mathfrak{L}^2+\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2.\quad T^2(\varrho_\eta')=\mathfrak{L}'^2+\mathfrak{M}'^2+\mathfrak{N}'^2,$$

изъ этихъ ур. мы выводимъ:

$$T^2(\varrho_\xi)=T^2(\varrho_\xi'),\quad T^2(\varrho_\eta)=T^2(\varrho_\eta')$$

т. е. тензоръ каждой изъ стрѣлокъ съ перемѣной точки или плоскости приведенія не измѣняется и въ частномъ случаѣ для всѣхъ точекъ и плоскостей приведенія равняется нулю, если онъ равенъ нулю для какой нибудь одной точки или плоскости. Но мы знаемъ, что тензоръ стрѣлки можетъ равняться нулю только въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда сама стрѣлка равняется нулю, во-вторыхъ, когда ось ея имѣетъ абсолютное направленіе (§ 47_6). Эти два случая рѣзко различаются одинъ отъ другого. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ (161) и (162) мы видимъ, что $\mathfrak{X}'=\mathfrak{Y}'=\mathfrak{Z}'=0$, если $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}$, и $\mathfrak{L}'=\mathfrak{M}'=\mathfrak{N}'=0$, если $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=0$, т. е. стрѣлка, которая равняется нулю для одной точки или плоскости, будетъ равняться нулю и для всякой другой. Отсюда уже ясно, что стрѣлка, ось которой имѣетъ абсолютное направленіе для одной точки или плоскости приведенія, не можетъ быть равна нулю для другой, но для всякой другой точки или плоскости будетъ представлять собой роторъ, лежащій на абсолютномъ направленіи. Итакъ мы имѣемъ такую весьма важную теорему, которую ниже мы положимъ въ основаніе классификаціи моторовъ.

Теорема I.—*Стрѣлка мотора для всѣхъ точекъ и плоскостей равняется нулю, если она равнятся нулю для одной точки или плоскости; стрѣлка мотора для всѣхъ точекъ и плоскостей имѣетъ абсолютное направленіе, если она имѣетъ абсолютное направленіе для одной точки или плоскости.*

Чтобы изслѣдовать, какъ измѣняется положеніе осей стрѣлокъ съ перемѣщеніемъ точки или плоскости приведенія, при-

мемъ ось η-стрѣлки для точки o (плоскости O) за ось z, линію, проходящую черезъ o' (лежащую въ O'), ξ-параллельную и одинаково направленную (§ 55_4) съ z, за ось z', общій къ z и z' перпендикуляръ возьмемъ за ось x' и наконецъ оси x,y и y' возьмемъ такъ, чтобы системы x,y,z и x',y',z' были ортогональны. При такомъ выборѣ осей, означая черезъ (zx'), (zy'), (zz') комплексные углы между направленіемъ оси z и направленіями осей x',y',z', имѣемъ

$$\mathfrak{X}=0,\ \mathfrak{Y}=0,\ \mathfrak{Z}=\mathrm{T}(\varrho_\xi)$$
$$(zx')=\pi/2,(zy')=2\theta\eta-\pi/2,(zz')=2\theta\eta$$
$$n_1=0,\qquad n_2=\sin 2\theta.\eta,\qquad n_3=\cos 2\theta.\eta+\xi$$

гдѣ θ уголъ между направленіями z и z' и уравненія (161) обращаются въ слѣдующія

$$\mathfrak{X}'=0,\ \mathfrak{Y}'=0,\ \mathfrak{Z}'=\mathfrak{Z}.$$

Первыя два изъ этихъ равенствъ показываютъ, что η-стрѣлка для точки o' (плоскость O') имѣетъ линію z' своею осью, а третье—что тензоры η-стрѣлокъ для точекъ o,o' (плоскостей O,O'), отвѣчающіе направленіямъ осей z и z', равны между собой. Такимъ образомъ оси $\varrho_{\eta'}$ и ϱ_η ξ-параллельны, и равные тензоры стрѣлокъ соотвѣтствуютъ одинаковымъ направленіямъ (§ 55_4) ихъ осей. Примѣняя подобныя же разсужденія къ ξ-стрѣлкамъ, мы приходимъ къ такой теоремѣ.

Теорема II.—*Оси всѣхъ ξ-стрѣлокъ (η-стрѣлокъ) одного и того же мотора, построенныхъ для различныхъ точекъ или плоскостей приведенія, всѣ между собой η-параллельны (ξ-параллельны). Тензоры ξ-стрѣлокъ (η-стрѣлокъ) равны по абсолютной величинѣ, причемъ одинаковые знаки ихъ соотвѣтствуютъ одинаковымъ направленіямъ осей.*

79. **Инваріанты и стрѣлки мотора.** — Займемся теперь изслѣдованіемъ вопроса, въ какомъ отношеніи стрѣлки находятся къ инваріантамъ, о которыхъ шла рѣчь въ § 67. Мы не будемъ останавливаться на разсмотрѣніи геометрическихъ инваріантовъ. Относительно ихъ мы замѣтимъ только, что стрѣлка суммы равняется суммѣ одноименныхъ съ ней стрѣлокъ слагаемыхъ, что стрѣлка векторнаго произведенія двухъ моторовъ равняется векторному произведенію одноименныхъ съ ней стрѣлокъ множителей, что ξ-стрѣлка (η-стрѣлка) произведенія $s\varrho$ мотора ϱ на число $s=u_s\xi+v_s\eta$ равняется произведенію ξ-стрѣлки (η-стрѣлка) мотора ϱ на число u_s (на

число v_s). Замѣтимъ еще, что это послѣднее свойство стрѣлокъ влечетъ за собой слѣдующее: если мы имѣемъ двѣ эквивалентныя системы моторовъ то, измѣнивъ моторы обѣихъ системъ такъ, чтобы всѣ ξ-стрѣлки умножились на число u_s, а всѣ η-стрѣлки на число v_s, то получимъ двѣ новыя системы, которыя также будутъ между собой эквивалентны. Доказательство всѣхъ этихъ предложеній мы предоставляемъ самому читателю.

Аналитическіе инваріанты мы разсмотримъ нѣсколько подробнѣе.

Въ теоріи координатъ, соотвѣтствующихъ комплекснымъ единицамъ ξ,η, роль аналогичную съ функціями J_1 и J_2 (см. § 73) играютъ двѣ другія квадратичныя функціи $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$, представляющія собой коэффиціенты при ξ и η въ развернутомъ выраженіи квадрата тензора H мотора ϱ:

$$H^2=\mathfrak{J}_1\xi+\mathfrak{J}_2\eta. \tag{164}$$

Сравнивая это выраженіе съ

$$H^2=J_1+\omega J_2, \tag{165}$$

легко видѣть, что функціи $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ связаны съ J_1 и J_2 соотношеніями

$$\mathfrak{J}_1=J_1+\varkappa J_2,\ \mathfrak{J}_2=J_1-\varkappa J_2. \tag{166}$$

Мы получаемъ для $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ различныя выраженія, смотря по тому которую изъ формулъ (81), (82) или (84) для H^2 мы развернемъ. Изъ (81) имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1&=\mathfrak{X}\mathfrak{A}+\mathfrak{Y}\mathfrak{B}+\mathfrak{Z}\mathfrak{C},\\ \mathfrak{J}_2&=\mathfrak{L}\mathfrak{P}+\mathfrak{M}\mathfrak{Q}+\mathfrak{N}\mathfrak{R}.\end{aligned}\right\} \tag{167}$$

Такъ какъ H^2 инваріантъ, то $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ также представляютъ собой инваріанты и должны сохранять одинъ и тотъ-же геометрическій смыслъ, каковы бы ни были оси координатъ. Но мы знаемъ, что въ томъ случаѣ, когда оси проходятъ черезъ одну и ту же точку o $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ суть проэкціи и составляющія по осямъ координатъ стрѣлки ϱ_ξ для точки o, а $\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R}$ проэкціи и составляющія стрѣлки ϱ_η для той же точки и по тѣмъ же осямъ. Въ этомъ случаѣ формула (81) даетъ намъ

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}\mathfrak{A}+\mathfrak{Y}\mathfrak{B}+\mathfrak{Z}\mathfrak{C}&=T^2(\varrho_\xi)=T_\xi{}^2,\\ \mathfrak{L}\mathfrak{P}+\mathfrak{M}\mathfrak{Q}+\mathfrak{N}\mathfrak{R}&=T^2(\varrho_\eta)=T_\eta{}^2.\end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Поэтому всегда, каковы бы ни были оси,

$$\mathfrak{I}_1 = T^2_\xi, \quad \mathfrak{I}_2 = T^2_\eta, \tag{169}$$

$$H^2 = T^2_{\xi\xi} + T^2_{\eta\eta}. \tag{170}$$

Извлекая изъ послѣдняго равенства квадратный корень, получаемъ

$$H = \pm T_{\xi\xi} \pm T_{\eta\eta}, \tag{171}$$

причемъ четыре возможныхъ комбинаціи знаковъ дадутъ намъ всѣ четыре значенія тензора мотора.

Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема I. — *Тензоръ мотора равняется комплексному числу, у котораго коэффиціентами при ξ и η служатъ тензоры ξ- и η-стрѣлокъ, представляющіе собой инваріантны.*

Слѣдствіе. — Эта теорема позволяетъ намъ по даннымъ тензорамъ стрѣлокъ опредѣлить тензоръ мотора и обратно, зная тензоръ мотора, найти тензоры стрѣлокъ. Если сравнимъ два выраженія тензора

$$H = R + \omega G, \quad H = T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta},$$

то получимъ соотношенія

$$T_\xi = R + \varkappa G, \quad T_\eta = R - \varkappa G, \tag{172}$$

изъ которыхъ видно, что тензоръ мотора обращается въ тензоръ ξ-стрѣлки, если ω замѣнимъ черезъ $+\varkappa$, и въ тензоръ η-стрѣлки, если ω замѣнимъ черезъ $-\varkappa$.

Модуль и аргументъ мотора весьма просто выражаются черезъ тензоры стрѣлокъ:

$$\text{модуль} = \sqrt{T_\xi T_\eta}, \quad \text{аргументъ} = \frac{1}{2\varkappa}\log(T_\xi / T_\eta). \tag{173}$$

Обозначивъ коэффиціенты при ξ и η у комплекснаго числа равнаго геометрическому произведенію двухъ моторовъ ϱ и ϱ_1 черезъ $(\varrho\varrho_1)_\xi$ и $(\varrho\varrho_1)_\eta$, изъ сравненія равенствъ

$$\overline{\varrho\varrho_1} = \text{км}(\varrho\varrho_1) + \omega\,\text{мм}(\varrho\varrho_1)$$
$$\overline{\varrho\varrho_1} = (\varrho\varrho_1)_{\xi\xi} + (\varrho\varrho_1)_{\eta\eta}$$

выводимъ соотношенія

$$\left.\begin{aligned}(\varrho\varrho_1)_\xi &= \text{км}(\varrho\varrho_1) + \varkappa\,\text{мм}(\varrho\varrho_1),\\ (\varrho\varrho_1)_\eta &= \text{км}(\varrho\varrho_1) - \varkappa\,\text{мм}(\varrho\varrho_1),\end{aligned}\right\} \tag{174}$$

между этими коэффиціентами и относительнымъ комоментомъ и моментомъ роторовъ ϱ и ϱ_1. Для $(\varrho\varrho_1)_\xi$ и $(\varrho\varrho_1)_\eta$ мы можемъ получить три различныхъ выраженія, развертывая формулы (87), (88), (90). Изъ первой мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}(\varrho\varrho_1)_\xi &= \mathfrak{X}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{Z}\mathfrak{C}_1,\\ (\varrho\varrho_1)_\eta &= \mathfrak{L}\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{N}\mathfrak{R}_1.\end{aligned}\right\} \qquad (175)$$

гдѣ $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1$ суть составляющія мотора ϱ_1. Такъ какъ функціи $(\varrho\varrho_1)_\xi$ и $(\varrho\varrho_1)_\eta$ представляютъ собой инваріанты, что видно изъ равенствъ (174), то ихъ геометрическое значеніе не измѣнится, если мы предположимъ, что оси координатъ пересѣкаются въ одной точкѣ o. Но въ такомъ случаѣ по формулѣ (87)

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{Z}\mathfrak{C}_1 &= \overline{\varrho_\xi \varrho_{1\xi}},\\ \mathfrak{L}\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{N}\mathfrak{R} &= \overline{\varrho_\eta \varrho_{1\eta}},\end{aligned}$$

гдѣ $\varrho_{1\xi}$ и $\varrho_{1\eta}$ суть стрѣлки мотора ϱ_1 для точки o. Слѣдовательно и всегда, каковы бы ни были оси координатъ

$$(\varrho\varrho_1)_\xi = \overline{\varrho_\xi \varrho_{1\xi}}, \quad (\varrho\varrho_1)_\eta = \overline{\varrho_\eta \varrho_{1\eta}}. \qquad (176)$$

Отсюда такая теорема.

Теорема II.—*Коэффиціенты при ξ и η въ развернутомъ выраженіи геометрическаго произведенія двухъ моторовъ, представляющіе собой инваріанты, равняются соотвѣтственно геометрическимъ произведеніямъ ихъ ξ- и η-стрѣлокъ, построенныхъ для какой нибудь одной и той же точки или плоскости приведенія.*

Слѣдствіе. — Уголъ между осями одноименныхъ стрѣлокъ двухъ моторовъ, построенныхъ для одной и той же точки или плоскости приведенія, не зависитъ отъ положенія послѣднихъ.

Дѣйствительно геометрическое произведеніе ξ-стрѣлокъ (η-стрѣлокъ), построенныхъ для одной и той же точки или плоскости приведенія, произведеніе, которое не зависитъ отъ положенія этихъ послѣднихъ, состоитъ изъ трехъ множителей: тензоровъ стрѣлокъ и косинуса угла между ихъ осями. Два изъ этихъ множителей — тензоры стрѣлокъ не зависятъ отъ положенія точки или плоскости приведенія, слѣдовательно и третій множитель — косинусъ угла между осями одноименныхъ стрѣлокъ двухъ моторовъ долженъ

обладать тѣмъ же свойствомъ; тѣмъ же свойствомъ долженъ обладать и самый уголъ.

80. **Комплексный уголъ въ единицахъ ξ,η.** — Предположимъ, что моторъ ϱ имѣемъ ось α и пусть его элементами для точки приведенія o, находящейся на α, служатъ векторъ σ и роторъ C. Такъ какъ по опредѣленію оси, линія α служитъ лучомъ для σ и осью для C, то обѣ стрѣлки

$$\varrho_\xi = \mathrm{C} + \frac{\omega}{\varkappa}\sigma, \quad \varrho_\eta = \mathrm{C} - \frac{\omega}{\varkappa}\sigma$$

для точки o будутъ имѣть α своею осью. Поэтому для всѣхъ точекъ и плоскостей приведенія оси ξ-стрѣлокъ мотора ϱ будутъ η-параллельны, а оси всѣхъ η-стрѣлокъ—ξ-параллельны съ осью α. Если оси α мы припишемъ какое нибудь винтовое направленіе, черезъ R означимъ тензоръ C, черезъ G—тензоръ σ, то

$$H = R + \omega G = (R + \varkappa G)\xi + (R - \varkappa G)\eta$$

будетъ тензоромъ мотора ϱ, соотвѣтствующимъ выбранному направленію α, а

$$\mathrm{T}_\xi = R + \varkappa G, \quad \mathrm{T}_\eta = R - \varkappa G$$

—тензорами стрѣлокъ ϱ_ξ и ϱ_η, соотвѣтствующими тому же направленію α. Величины T_ξ и T_η по теоремѣ II § 78 будутъ также тензорами стрѣлокъ мотора ϱ для всякой точки и плоскости приведенія, тензорами, отвѣчающими направленіямъ осей одинаковымъ съ направленіемъ α. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема I.—*Если моторъ имѣетъ ось α, то для всѣхъ точекъ или плоскостей приведенія оси ξ-стрѣлокъ (η-стрѣлокъ) мотора ϱ η-параллельны (ξ-параллельны) съ осью α, причемъ, если $H = R + \omega G$ есть тензоръ мотора, соотвѣтствующій выбранному направленію оси α, то $R + \varkappa G$ ($R - \varkappa G$) будетъ тензоромъ ξ-стрѣлокъ (η-стрѣлокъ), соотвѣтствующимъ одинаковымъ съ α направленіямъ.*

Пусть комплексный уголъ между направленіями двухъ прямыхъ α и α_1 равняется

$$\vartheta = \theta + \omega\delta.$$

Построимъ два мотора ϱ и ϱ_1, для которыхъ прямыя α и α_1

служили бы осями, и предположимъ, что для данныхъ направленій α и α_1

$$H = R + \omega G = (R + \varkappa G)\xi + (R - \varkappa G)\eta = T_\xi \xi + T_\eta \eta,$$
$$H_1 = R_1 + \omega G_1 = (R_1 + \varkappa G_1)\xi + (R_1 - \varkappa G_1)\eta = T_{1\xi}\xi + T_{1\eta}\eta$$

суть тензоры ϱ и ϱ_1. Развертывая формулы (86, 87) мы имѣемъ

$$T_\xi T_{1\xi} \cos(\theta + \varkappa\delta) = \mathfrak{XA}_1 + \mathfrak{YB}_1 + \mathfrak{ZC}_1,$$
$$T_\eta T_{1\eta} \cos(\theta - \varkappa\delta) = \mathfrak{LB}_1 + \mathfrak{MO}_1 + \mathfrak{NR}_1$$

Отсюда видно, что уголъ между направленіями осей ξ-стрѣлокъ ϱ_ξ и $\varrho_{1\xi}$ равняется $\theta + \varkappa\delta$, а уголъ между направленіями осей η-стрѣлокъ ϱ_η и $\varrho_{1\eta}$ равняется $\theta - \varkappa\delta$, гдѣ бы ни находилась общая для обоихъ моторовъ ϱ и ϱ_1 точка или плоскость приведенія. Но оси ξ- и η-стрѣлокъ, отвѣчающія тензорамъ $T_\xi, T_\eta, T_{1\xi}$, и $T_{1\eta}$, одинаково направлены съ осями α и α_1, причемъ первыя двѣ η-параллельны, а вторыя двѣ—ξ-параллельны съ α и α_1; мы имѣемъ слѣдовательно такую теорему.

Теорема II.—*Если*

$$\vartheta = \theta + \omega\delta = (\theta + \varkappa\delta)\xi + (\theta - \varkappa\delta)\eta$$

комплексный уголъ между направленіями двухъ прямыхъ α и α_1, то уголъ между направленіями двухъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же точку или въ одной и той же плоскости, ξ-параллельныхъ (η-параллельныхъ) и одинаково направленныхъ съ α и α_1 равняется $\theta + \varkappa\delta$ ($\theta - \varkappa\delta$).

Слѣдствіе.—Мы знаемъ, что

$$\cos\vartheta = \cos(\theta + \varkappa\delta)\xi + \cos(\theta - \varkappa\delta)\eta,$$
$$\sin\vartheta = \sin(\theta + \varkappa\delta)\xi + \sin(\theta - \varkappa\delta)\eta.$$

Мы можемъ поэтому сказать, что коэффиціентами при ξ (при η) у тригонометрической функціи комплекснаго угла между направленіями двухъ прямыхъ α и α_1 служитъ та-же тригонометрическая функція отъ угла между направленіями двухъ прямыхъ η-параллельныхъ (ξ-параллельныхъ), одинаково направленныхъ съ α и α_1 и проведенныхъ черезъ одну и ту же точку или въ одной плоскости.

81. **Геометрическое значеніе координатъ въ системѣ ξ и η.**—Пользуясь доказанными въ предыдущихъ парагра-

фахъ теоремами, мы можемъ теперь раскрыть геометрическій смыслъ координатъ

$$\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C};\ \mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R},$$

каково бы ни было относительное расположеніе координатныхъ осей.

Если σ и $\mathfrak{C}$ суть векторъ и роторъ мотора ϱ для точки приведенія a, находящейся на оси x, то

$$\varrho_{\xi a}=\mathfrak{C}+\frac{\omega}{\varkappa}\sigma,\quad \varrho_{\eta a}=\mathfrak{C}-\frac{\omega}{\varkappa}\sigma$$

будутъ стрѣлками мотора ϱ для точки a. Такъ какъ коэффиціенты X и L алгебраической проэкціи $x=X+\omega L$ мотора ϱ на ось x суть алгебраическія проэкціи ротора $\mathfrak{C}$ и вектора σ, то изъ равенствъ, опредѣляющихъ стрѣлки для точки a, видно, что

$$\mathfrak{X}=X+\varkappa L,\quad \mathfrak{L}=X-\varkappa L$$

представляютъ собой алгебраическія проэкціи $\varrho_{\xi a}$ и $\varrho_{\eta a}$ на ось x. Проведемъ теперь черезъ какую нибудь точку o_1 (въ какой нибудь плоскости O_1) линію x_η одинаково направленную и η-параллельную съ осью x и построимъ для точки o_1 (плоскости O_1) ξ-стрѣлку ϱ_ξ. Такъ какъ ось ϱ_ξ η-параллельна и одинаково направлена съ осью $\varrho_{\xi a}$, то уголъ между осями ϱ_ξ и x_η будетъ равняться углу между $\varrho_{\xi a}$ и x; такъ какъ кромѣ того тензоры $\varrho_{\xi a}$ и ϱ_ξ по теоремѣ II § 78 равны, то проэкція ϱ на ось x_η будетъ равняться проэкціи $\varrho_{\xi a}$ на ось x и слѣдовательно будетъ равняться координатѣ

$$\mathfrak{X}=X+\varkappa L$$

мотора ϱ. Подобнымъ же образомъ мы легко покажемъ, что двѣ другія координаты $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ представляютъ собой проэкціи ротора ϱ_ξ на оси y_η и z_η проведенныя черезъ o_1 (въ плоскости O_1) η-параллельныя и одинаково направленныя соотвѣтственно съ осями y и z. Чтобы раскрыть геометрическій смыслъ величинъ $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ развернемъ формулы (76); мы получимъ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}&=\mathfrak{A} &&+\mathfrak{B}(\nu_I+\varkappa\nu_{II}) &&+\mathfrak{C}(\mu_I+\varkappa\mu_{II}),\\
\mathfrak{Y}&=\mathfrak{A}(\nu_I+\varkappa\nu_{II}) &&+\mathfrak{B} &&+\mathfrak{C}(\lambda_I+\varkappa\lambda_{II}),\\
\mathfrak{Z}&=\mathfrak{A}(\mu_I+\varkappa\mu_{II}) &&+\mathfrak{B}(\lambda_I+\varkappa\lambda_{II}) &&+\mathfrak{C}.
\end{aligned}\qquad (177)$$

Коэффиціенты $\lambda_1 + \varkappa\lambda_{11}$, $\mu_1 + \varkappa\mu_{11}$, $\nu_1 + \varkappa\nu_{11}$ на основаніи слѣдствія изъ теоремы III предыдущаго параграфа представляютъ собой косинусы угловъ между осями y_η и z_η, z_η и x_η, x_η и y_η, а потому изъ уравненій (177) слѣдуетъ, что $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ суть составляющія ротора ϱ_ξ по осямъ x_η, y_η, z_η.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, легко обнаружимъ, что $\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R}$ суть проэкціи и составляющія стрѣлки ϱ_η построенной для какой нибудь точки o_2 (плоскости O_2), которая можетъ совпадать или не совпадать съ точкой o_1 (плоскостью O_1), по тремъ осямъ x_ξ, y_ξ, z_ξ, проведеннымъ черезъ точку o_2 (въ плоскости O_2) ξ-параллельнымъ и одинаково направленнымъ съ осями x,y,z.

Комплексныя числа x,y,z,a,b,c обращаются въ координаты $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$, если мы замѣнимъ въ нихъ ω черезъ $+\varkappa$, и въ координаты $\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R}$, когда замѣнимъ въ нихъ ω черезъ $-\varkappa$. Далѣе, въ § 79 мы показали, что замѣняя въ тензорѣ мотора ω черезъ $+\varkappa$, мы получаемъ тензоръ ξ-стрѣлки, замѣняя же ω черезъ $-\varkappa$, мы получаемъ тензоръ η-стрѣлки. Замѣчая, наконецъ, что комплексный уголъ $\theta + \omega\delta$ между двумя данными прямыми обращается въ уголъ между двумя прямыми, проведенными черезъ одну и ту же точку или въ одной и той же плоскости τ-параллельными съ данными, когда ω замѣнимъ черезъ $+\varkappa$, и ξ-параллельными съ данными, когда ω замѣнимъ черезъ $-\varkappa$, мы можемъ правило параграфа 77 формулировать такимъ образомъ.

Для того, чтобы изъ какой нибудь неразвернутой формулы получить формулы развернутыя, надо *одинъ разъ* замѣнить тензоръ, проэкціи и составляющія мотора по осямъ координатъ тензоромъ, проэкціями и составляющими ξ-стрѣлки, построенной для какой нибудь точки или плоскости по осямъ, проведеннымъ черезъ эту точку или въ этой плоскости и η-параллельнымъ съ координатными осями, и комплексный уголъ между двумя прямыми—угломъ между двумя прямыми, проведенными черезъ одну и ту же точку или въ одной и той же плоскости η-параллельными и одинаково направленными съ данными, а въ *другой разъ* надо замѣнить тензоръ, проэкціи и составляющія мотора по осямъ координатъ тензоромъ, проэкціями и составляющими η-стрѣлки построенной для какой нибудь точки или плоскости по осямъ, проведеннымъ черезъ ту же точку или въ той же плоскости ξ-параллельными съ осями координатъ, и комплексный уголъ между двумя прямыми—угломъ между двумя прямыми, проведенными черезъ одну и ту же точку или въ одной плоскости, ξ-параллельными и одинаково направленными съ данными.

82. **Условіе относительно осей координатъ.**—Выборъ координатныхъ осей x,y,z долженъ быть ограниченъ условіемъ, чтобы опредѣлитель Δ не былъ равенъ комплексному числу, изображаемому точкой какой нибудь изъ инваріантныхъ прямыхъ линій (§ 63). Разсмотримъ какой геометрическій смыслъ имѣетъ это условіе относительно Δ. Развертывая опредѣлитель Δ, мы имѣемъ

$$\Delta=\Delta_1\xi+\Delta_2\eta$$

гдѣ

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & , & \nu_I+\varkappa\nu_{II}, & \mu_I+\varkappa\mu_{II} \\ \nu_I+\varkappa\nu_{II}, & & 1 & , & \lambda_I+\varkappa\lambda_{II} \\ \mu_I+\varkappa\mu_{II}, & & \lambda_I+\varkappa\lambda_{II}, & & 1 \end{vmatrix} \qquad (178)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & , & \nu_I-\varkappa\nu_{II}, & \mu_I-\varkappa\mu_{II} \\ \nu_I-\varkappa\nu_{II}, & & 1 & , & \lambda_I-\varkappa\lambda_{II} \\ \mu_I-\varkappa\mu_{II}, & & \lambda_I-\varkappa\lambda_{II}, & & 1 \end{vmatrix} \qquad (179)$$

Точка Δ будетъ лежать на инваріантной прямой I_2I_3, если Δ будетъ пропорціонально числу ξ, и слѣдовательно Δ_2 будетъ равняться нулю; точка Δ будетъ лежать на инваріантной прямой I_1I_3, если Δ будетъ пропорціонально числу η, и слѣдовательно Δ_1 будетъ равняться нулю; наконецъ Δ будетъ лежать на горизонтѣ только при условіи, что одинъ или оба опредѣлителя Δ_1 и Δ_2 равны безконечности. Итакъ для того, чтобы оси x,y,z могли служить координатными осями, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлители Δ_1 и Δ_2 не были равны ни нулю, ни безконечности. Замѣчая, что

$$\Delta_0=\Delta_1\Delta_2,$$

гдѣ

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1 & \nu_I & \mu_I & 0 & \varkappa^2\nu_{II} & \varkappa^2\mu_{II} \\ \nu_I & 1 & \lambda_I & \varkappa^2\nu_{II} & 0 & \varkappa^2\lambda_{II} \\ \mu_I & \lambda_I & 1 & \varkappa^2\mu_{II} & \varkappa^2\lambda_{II} & 0 \\ 0 & \nu_{II} & \mu_{II} & 1 & \nu_I & \mu_I \\ \nu_{II} & 0 & \lambda_{II} & \nu_I & 1 & \lambda_I \\ \mu_{II} & \lambda_{II} & 0 & \mu_I & \lambda_I & 1 \end{vmatrix}, \qquad (180)$$

это условіе можно выразить въ другой формѣ:

$$\Delta_0\neq 0,\ \Delta_0\neq\infty.$$

Мы знаемъ, что $\lambda_I+\varkappa\lambda_{II}$, $\mu_I+\varkappa\mu_{II}$, $\nu_I+\varkappa\nu_{II}$ суть углы между прямыми x_η,y_η,z_η проведенными черезъ одну и ту же o_1 или въ одной и той же плоскости O_1, η-параллельными и

одинаково направленными съ осями координатъ. Поэтому Δ_1 будетъ равняться нулю только при томъ условіи, что оси $x_{\eta_1}, y_{\eta_1}, z_{\eta_1}$ лежатъ всѣ въ одной плоскости, если онѣ проведены черезъ точку o_1, и проходятъ черезъ одну точку, если онѣ лежатъ въ плоскости O_1. Опредѣлитель Δ_1 можетъ сдѣлаться безконечно большимъ только тогда, когда одно изъ чиселъ $\lambda_I + \varkappa\lambda_{II}$, $\mu_I + \varkappa\mu_{II}$, $\nu_I + \varkappa\nu_{II}$ обращается въ безконечность, что въ свою очередь возможно только въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одна изъ осей $x_{\eta_1}, y_{\eta_1}, z_{\eta_1}$, а слѣдовательно и одна изъ осей x, y, z имѣетъ абсолютное направленіе. Разбирая подобнымъ же образомъ случаи, когда Δ_2 равняется нулю или безконечности, мы придемъ къ такому заключенію.

Для того, чтобы три прямыя x, y, z могли быть приняты за координатныя оси, необходимо и достаточно соблюденіе слѣдующихъ трехъ условій.

1. прямыя x, y, z не должны касаться абсолюта.

2. три прямыя, проведенныя черезъ какую нибудь точку (въ какой нибудь плоскости) и ξ-параллельныя съ прямыми x, y, z, не должны лежать въ одной плоскости (проходить черезъ одну точку).

3. три прямыя, проведенныя черезъ какую нибудь точку (въ какой нибудь плоскости) η_1-параллельныя съ прямыми x, y, z, не должны лежать въ одной плоскости (проходить черезъ одну точку).

Глава IV.

83. **Классификація моторовъ.**—Теорія комплексныхъ и простыхъ координатъ, развитая нами въ предыдущей главѣ, даетъ намъ возможность приступить къ изслѣдованію свойствъ мотора, этого обобщеннаго и вмѣстѣ съ тѣмъ основного элемента теоріи векторовъ, а именно позволяетъ намъ обратиться къ рѣшенію вопросовъ: всякій ли моторъ имѣетъ ось, какимъ образомъ для даннаго мотора можно построить его оси, какъ измѣняются элементы мотора съ перемѣной положенія точки или плоскости приведенія и т. п. Чтобы облегчить эти изслѣдованія, мы распредѣлимъ всю совокупность моторовъ на нѣсколько классовъ и типовъ. Основаніемъ для такого раздѣленія послужитъ для насъ выраженіе тензора мотора, тензора, который, какъ мы знаемъ, опредѣляется квадратнымъ ур.

$$H^2=ax+by+cz=\mathfrak{I}_1\xi+\mathfrak{I}_2\eta,$$

гдѣ x,y,z,a,b,c суть проэкціи и составляющія мотора ϱ по координатнымъ осямъ, а $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ суть инваріанты равные квадратамъ тензоровъ стрѣлокъ мотора:

$$\mathfrak{I}_1=\mathrm{T}^2_\xi\,,\quad \mathfrak{I}_2=\mathrm{T}^2_\eta\,.$$

Это ур. имѣетъ четыре корня, которые всѣ могутъ быть выражены одной формулой

$$H=\pm\mathrm{T}_\xi\xi\pm\mathrm{T}_\eta\eta. \qquad (1)$$

Къ первому классу мы отнесемъ всѣ тѣ моторы, у которыхъ тензоры стрѣлокъ отличны отъ нуля. Моторъ перваго класса имѣетъ четыре различныхъ тензора; ихъ мы получимъ по формулѣ (1), если будемъ различнымъ образомъ комбинировать знаки плюсъ и минусъ.

Ко второму мы причислимъ тѣ моторы, у которыхъ одна изъ стрѣлокъ имѣетъ тензоръ равный нулю. Моторъ второго класса имѣетъ только два различающихся знакомъ тензора, которые оба пропорціональны числу ξ:

$$H = \pm T_{\xi\xi},$$

если равняется нулю тензоръ η-стрѣлки, и оба пропорціональны числу η:

$$H = \pm T_{\eta\eta},$$

если равняется нулю тензоръ ξ-стрѣлки. Мы можемъ условиться говорить, что моторъ второго класса имѣетъ также четыре тензора, но два изъ нихъ равны двумъ другимъ.

Мы знаемъ, что существуетъ два рѣзко различающихся случая, когда тензоръ стрѣлки равняется нулю: въ одномъ—сама стрѣлка для всѣхъ точекъ и плоскостей приведенія равняется нулю, въ другомъ—стрѣлка для всѣхъ точекъ и плоскостей приведеніе имѣетъ абсолютное направленіе. Поэтому моторы второго класса мы можемъ подраздѣлить въ свою очередь на два типа.

1. Моторы, у которыхъ одна изъ стрѣлокъ имѣетъ абсолютное направленіе.

2. Моторы, у которыхъ одна изъ стрѣлокъ равняется нулю.

Къ третьему классу мы отнесемъ всѣ моторы, для которыхъ равняется нулю тензоры обѣихъ стрѣлокъ. Всѣ моторы этого класса имѣютъ четыре равныхъ нулю тензора.

Моторы третьяго класса мы можемъ въ свою очередь на основаніи теоремы I § 78 раздѣлить на три типа.

1. Моторы, у которыхъ обѣ стрѣлки имѣютъ абсолютное направленіе.

2. Моторы, у которыхъ одна стрѣлка имѣетъ абсолютное направленіе, а другая равняется нулю.

3. Моторы, у которыхъ обѣ стрѣлки равняются нулю.

84. **Построеніе осей мотора.**—Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ изслѣдованію свойствъ моторовъ каждаго класса и типа отдѣльно, мы раскроемъ нѣкоторыя общія всѣмъ моторамъ свойства. Покажемъ сначала, какимъ образомъ для даннаго мотора построить его оси и опредѣлить соотвѣтствующіе имъ тензоры. Мы дадимъ два способа рѣшать эту задачу; одинъ основанный на свойствахъ стрѣлокъ мотора, другой на рѣшеніи и изслѣдованіи ур. (80) § 64.

Покажемъ въ чемъ заключается первый способъ.

Предположимъ, что для нѣкоторой точки (плоскости) приведенія c линія γ служитъ осью ξ-стрѣлки, а для нѣкоторой точки (плоскости) приведенія b линія β—осью η-стрѣлки мотора ϱ. Припишемъ линіями β и γ какія нибудь направленія и означимъ черезъ T_ξ и T_η тензоры стрѣлокъ, соотвѣтствующія этимъ направленіямъ. Если линія α η-параллельна съ γ и ξ-параллельна съ β, то по теоремѣ II § 78 стрѣлки ϱ_ξ и ϱ_η, построенныя для точки приведенія o, находящейся на линіи α, будутъ имѣть α своею осью; линія α будетъ служить поэтому осью для ротора

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{1}{2}(\varrho_\xi + \varrho_\eta) \\ \text{и лучомъ для вектора } \sigma &= \frac{\omega}{2\varkappa}(\varrho_\xi - \varrho_\eta), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

представляющихъ собой элементы мотора ϱ для точки приведенія o: линія α будетъ осью мотора ϱ. Припишемъ линіи α какое нибудь направленіе. Если оно одинаково съ направленіями β и γ, то $T(\varrho_\xi)$ и $T(\varrho_\eta)$, ему соотвѣтствующіе, будутъ равны T_ξ и T_η, и мы изъ равенствъ (2) получимъ

$$R = T(\mathfrak{C}) = \frac{1}{2}(T_\xi + T_\eta), \quad G = T(\sigma) = \frac{1}{2\varkappa}(T_\xi - T_\eta)$$

и затѣмъ $$H = R + \omega G = T_\xi \xi + T_\eta \eta$$

—тензоръ мотора, соотвѣтствующій направленію α. Если же направленіе α будетъ противоположно съ направленіями β и γ, то

$$T(\varrho_\xi) = -T_\xi, \quad T(\varrho_\eta) = -T_\eta,$$

и мы изъ равенствъ (2) будемъ имѣть

$$R = -\frac{1}{2}(T_\xi + T_\eta), \quad G = -\frac{1}{2\varkappa}(T_\xi - T_\eta)$$

и затѣмъ $$H = -T_\xi \xi - T_\eta \eta.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$H = -T_\xi \xi + T_\eta \eta,$$

когда направленіе α одинаково съ β и различно съ γ и

$$H=T_\xi \xi — T_\eta \gamma,$$

когда направленіе α одинаково съ γ и различно съ β. Итакъ, принимая во вниманіе теорему I § 80, мы имѣемъ слѣдующую.

Теорема I.—*Для того, чтобы линія α была осью мотора, необходимо и достаточно, чтобы она была ξ-параллельна съ осью η-стрѣлки и η-параллельна съ осью ξ-стрѣлки мотора, построенныхъ для одной и той же или для различныхъ точекъ или плоскостей приведенія. Если* T_ξ *и* T_η *суть тензоры стрѣлокъ, то*

$$H=\pm T_\xi \xi \pm T_\eta \eta$$

будетъ тензоромъ мотора для выбраннаго направленія α, причемъ въ первомъ (во второмъ) членѣ надо взять знакъ плюсъ, когда направленіе α одинаково съ направленіемъ оси ξ-стрѣлки (η-стрѣлки) и знакъ минусъ въ противномъ случаѣ.

Такимъ образомъ, если намъ извѣстны оси β и γ стрѣлокъ мотора для одной и той же или для различныхъ точекъ или плоскостей приведенія, то задача разысканія осей мотора сводится къ построенію прямыхъ ξ-параллельныхъ съ данной прямой β и η-параллельныхъ съ данной прямой γ, т. е. къ задачѣ, которая нами была рѣшена и изслѣдована въ § 55_6.

Перейдемъ къ изложенію второго способа.

Мы вывели въ § 64 слѣдующія формулы

$$\left.\begin{array}{c} x=H\cos\vartheta_1,\ y=H\cos\vartheta_2,\ z=H\cos\vartheta_3, \\ H^2=ax+by+cz, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

гдѣ H означаетъ тензоръ мотора,

$$\vartheta_1=\theta_1+\omega\delta_1,\ \vartheta_2=\theta_2+\omega\delta_2,\ \vartheta_3=\theta_3+\omega\delta_3,$$

комплексные углы между направленіемъ оси мотора, соотвѣтствующей тензору H, и координатными осями, x,y,z,a,b,c проэкціи и составляющія мотора по осямъ координатъ. Эти формулы могутъ служить для вычисленія координатъ мотора, когда ось мотора и соотвѣтствующій ей тензоръ даны. Но онѣ могутъ служить и для рѣшенія обратной задачи: по даннымъ координатамъ мотора найти его тензоры и построить соотвѣтствующія имъ оси. Дѣйствительно, если мы опредѣ-

лимъ $H, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ такъ, чтобы, во-первыхъ, они удовлетворяли ур. (3) и, во-вторыхъ, такъ, чтобы существовала прямая линія α, образующая съ координатными осями комплексные углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, то α будетъ осью даннаго мотора $\varrho(x,y,z)$ и H тензоромъ его, соотвѣтствующимъ этой оси, ибо моторъ съ тензоромъ H и осью α въ силу того, что $H, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ удовлетворяютъ ур. (3), будетъ имѣть проэкціями числа x,y,z и слѣдовательно (сл. III теор. III § 63) будетъ равняться данному мотору ϱ. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема II.—*Для того, чтобы линія α, направленіе которой съ осями координатъ образуетъ комплексные углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, была осью и число H было тензоромъ мотора, соотвѣтствующимъ направленію α, необходимо и достаточно, чтобы $H, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ удовлетворяли ур. (3).*

На основаніи этой теоремы разысканіе осей и соотвѣтствующихъ имъ тензоровъ мотора сводится къ рѣшенію двухъ задачъ: во-первыхъ, найти всѣ значенія $H, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, удовлетворяющія ур. (3), и, во-вторыхъ, построить, если это возможно, прямыя, направленія которыхъ съ координатными осями образуютъ углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Первая задача—рѣшеніе ур. (3) относительно $H, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$—не представляетъ затрудненій. Рѣшеніе второй, болѣе трудной, задачи мы можемъ облегчить, выбирая надлежащимъ образомъ оси координатъ.

Дѣйствительно, возьмемъ точку o приведенія мотора за начало координатъ, оси x и y проведемъ въ плоскости приведенія O и ось z черезъ точку o перпендикулярно къ плоскости O (или въ плоскости O перпендикулярно къ точкѣ o); тогда $z=0$, и ур. (3) примутъ видъ

$$x=H\cos\vartheta_1,\quad y=H\cos\vartheta_2,\quad 0=\cos\vartheta_3, \tag{4}$$

$$H^2=ax+by. \tag{5}$$

Будемъ искать оси, которыя пересѣкаютъ ось z подъ прямымъ угломъ. Пусть α такая ось и H, соотвѣтствующій ей тензоръ. Комплексные углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, которые α образуетъ съ осями x,y,z, на основаніи доказанной теоремы, будутъ удовлетворять ур. (4) и (5). Такъ какъ прямыя α, x, y имѣютъ общій перпендикуляръ z, то по свойству сложимости $\vartheta_2+\varphi=\vartheta_1$ и

$$\cos\vartheta_2=\cos\varphi\cos\vartheta_1+\sin\varphi\sin\vartheta_1, \tag{6}$$

гдѣ φ комплексный уголъ между осями x и y. Уголъ ϑ_1

будетъ удовлетворять слѣдовательно двумъ ур.

$$H\cos\vartheta_1 = x,\quad H\sin\vartheta_1 = (y - x\cos\varphi) : \sin\varphi. \qquad (7)$$

Обратно, предположивъ, что мы нашли уголъ ϑ_1, удовлетворяющій ур. (5) и (7), построимъ прямую a, которая пересѣкаетъ ось z подъ прямымъ угломъ и образуетъ съ осью x комплексный уголъ ϑ_1. Означивъ комплексный уголъ между y и a черезъ ϑ_2, мы имѣемъ $\vartheta_2 + \varphi = \vartheta_1$ и затѣмъ изъ ур. (7), пользуясь (6), получаемъ первыя два изъ (4). Такъ какъ по построенію уголъ ϑ_3, который a образуетъ съ осью z, прямой, то $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ будутъ удовлетворять всѣмъ ур. (4) и (5): a на основаніи теоремы II будетъ осью мотора, соотвѣтствующею тензору H.

Итакъ опредѣленіе осей, пересѣкающихъ ось z подъ прямымъ угломъ сводится къ рѣшенію ур. (7) и (5). Эти ур. совмѣстны, ибо при нашемъ выборѣ координатныхъ осей, мы имѣемъ

$$\lambda = \cos(yz) = 0,\quad \mu = \cos(zx) = 0,\quad \nu = \cos(xy) = \cos\varphi,$$

формула для тензора мотора (84 § 64) даетъ намъ

$$H^2 = (x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi) : \sin^2\varphi,$$

и, возвышая ур. (7) въ квадратъ и складывая, мы получимъ

$$\cos^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_1 = 1.$$

Ур. (7) опредѣляютъ ϑ_1 до періодовъ $2\pi\xi$ и $2\pi\eta$ (§ 58,) и слѣдовательно, если ϑ_{10} одинъ изъ корней этихъ уравненій, то всѣ другіе мы можемъ представить формулой

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} + 2m\pi\xi + 2n\pi\eta, \qquad (8)$$

гдѣ m и n цѣлыя числа. Но двѣ прямыя, пересѣкающія ось z подъ прямымъ угломъ, изъ которыхъ одна образуетъ съ осью x уголъ ϑ_{10}, а другая уголъ (8), совпадаютъ и имѣютъ одинаковое направленіе, каковы бы ни были числа m и n. Такимъ образомъ каждому значанію тензора будетъ соотвѣтствовать вообще говоря одна и только одна ось мотора.

Займемся рѣшеніемъ ур. (5) и (7), причемъ для простоты предположимъ, что уголъ φ между осями x и y прямой. Эти ур. тогда примутъ видъ

$$H\cos\vartheta_1 = x,\quad H\sin\vartheta_1 = y, \qquad (9)$$

$$H^2 = x^2 + y^2. \qquad (10)$$

Означая черезъ $H=R+\omega G$ какое нибудь изъ значеній тензора, изъ ур. (9) получимъ

$$\left.\begin{aligned} \cos\varkappa\delta_1\cos\theta_1&=\frac{XR-\varkappa^2LG}{R^2-\varkappa^2G^2}\,,\quad \frac{1}{\varkappa}\sin\varkappa\delta_1\sin\theta_1=\frac{XG-LR}{R^2-\varkappa^2G^2}\,,\\ \cos\varkappa\delta_1\sin\theta_1&=\frac{YR-\varkappa^2MG}{R^2-\varkappa^2G^2}\,,\quad \frac{1}{\varkappa}\sin\varkappa\delta_1\cos\theta_1=\frac{MR-YG}{R^2-\varkappa^2G^2}\,,\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

если развернемъ ихъ въ системѣ $(1,\omega)$, и

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta_1+\varkappa\delta_1)&=\frac{X+\varkappa L}{R+\varkappa G}\,,\quad \cos(\theta_1-\varkappa\delta_1)=\frac{X-\varkappa L}{R-\varkappa G}\,,\\ \sin(\theta_1+\varkappa\delta_1)&=\frac{Y+\varkappa M}{R+\varkappa G}\,,\quad \sin(\theta_1-\varkappa\delta_1)=\frac{Y-\varkappa M}{R-\varkappa G}\,,\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

если развернемъ ихъ въ системѣ (ξ,η). Изъ этихъ формулъ выводимъ еще слѣдующія:

$$\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa\delta_1=\frac{MR-YG}{XR-\varkappa^2LG}=\frac{XG-LR}{YR-\varkappa^2MG}\,,\qquad(13)$$

$$\operatorname{tang}\theta_1=\frac{YR-\varkappa^2MG}{XR-\varkappa^2LG}=\frac{XG-LR}{MR-YG}\,,\qquad(14)$$

$$\operatorname{tang}(\theta_1+\varkappa\delta_1)=\frac{Y+\varkappa M}{X+\varkappa L}\,,\quad \operatorname{tang}(\theta_1-\varkappa\delta_1)=\frac{Y-\varkappa M}{X-\varkappa L}\,,\qquad(15)$$

$$\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}2\varkappa\delta_1=2\frac{XM-YL}{X^2+Y^2-\varkappa^2(L^2+M^2)}\,,\qquad(16)$$

$$\operatorname{tang}2\theta_1=2\frac{XY-\varkappa^2LM}{X^2-Y^2-\varkappa^2(L^2-M^2)}\,.\qquad(17)$$

Мы дадимъ въ § 190 приложеніе второго способа, предоставляя читателю самому убѣдиться, что во всѣхъ случаяхъ, которые мы будемъ разсматривать ниже, онъ даетъ намъ тѣ же результаты, что первый способъ.

85. **Измѣненіе элементовъ мотора.**—Судить о тѣхъ измѣненіяхъ, которыя претерпѣваютъ элементы мотора, когда точка или плоскость приведенія перемѣщаются, позволяютъ намъ формулы преобразованія координатъ (§ 66). Эти формулы мы можемъ развернуть или въ системѣ $(1,\omega)$, или въ системѣ (ξ,η). Мы получимъ такимъ образомъ двѣ группы формулъ, которыя могутъ быть для насъ одинаково полезны. Первая

(формулы 126 § 72) даетъ намъ непосредственно измѣненія ротора и вектора мотора. Вторая (формулы 161 § 78), какъ было показано въ § 78, характеризуетъ измѣненія стрѣлокъ мотора и можетъ быть выражена теоремой II этого параграфа. Но по нимъ мы можемъ судить и объ измѣненіяхъ элементовъ мотора, если припомнимъ соотношенія

$$\left.\begin{aligned} \varrho_\xi &= C + \frac{\omega}{\varkappa}\sigma, \quad \varrho_\eta = C - \frac{\omega}{\varkappa}\sigma, \\ C &= \frac{1}{2}(\varrho_\xi + \varrho_\eta), \quad \sigma = \frac{\omega}{2\varkappa}(\varrho_\xi - \varrho_\eta), \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

которыя связываютъ роторъ C, векторъ σ и стрѣлки ϱ_ξ и ϱ_η мотора ϱ, построенныя для одной и той же точки или плоскости приведенія.

Итакъ формулы преобразованія координатъ даютъ намъ два метода изслѣдовать свойства мотора. Въ слѣдующемъ параграфѣ мы дадимъ приложеніе перваго метода, основаннаго на формулахъ (126) § 72, въ § 87 познакомимся со вторымъ, основаннымъ па свойствахъ стрѣлокъ.

86. **Общіе законы измѣненія элементовъ мотора.**—Допустимъ, что моторъ ϱ имѣетъ двѣ взаимно полярныя оси α и α'. Проведемъ черезъ точку o_1 оси α линію ε, пересѣкающую α' и слѣдовательно перпендикулярную къ α и α', и припишемъ ей какое нибудь направленіе. Чтобы изслѣдовать, какъ будутъ измѣняться элементы мотора, когда точка приведенія o будетъ перемѣщаться по линіи ε, примемъ точки o и o_1 за начала двухъ прямоугольныхъ координатныхъ системъ x,y,z и x',y',z'. Оси z и z' этихъ системъ совмѣстимъ и направимъ одинаково съ линіей ε. Ось α примемъ за ось x', а прямую, проходящую черезъ o и лежащую въ плоскости α и ε, за ось x. Осямъ x',y',z' мы припишемъ такія направленія, чтобы уголъ между направленіями x и x', соотвѣтствующій перпендикуляру ε, былъ равенъ нулю, а углы между x и y, x' и y' относительно направленія ε равнялись бы $\pi/2$. При такомъ выборѣ координатныхъ осей мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} &l_1 = \cos(\omega\delta), \quad m_1 = \cos(\pi/2 + \omega\delta), \quad n_1 = 0, \\ &x' = R + \omega G, \quad y' = 0, \qquad\qquad z' = 0, \end{aligned}$$

гдѣ δ разстояніе между o_1 и o, а $R+\omega G$ тензоръ мотора, соотвѣтствующій направленію α, и формулы преобразова-

нія (106) § 66 обратятся въ слѣдующія

$$x=x'\cos(\omega\delta),\ y=-x'\sin(\omega\delta),\ z=0.$$

Отсюда, припоминая, что

$$x=X+\omega L,\ y=Y+\omega M,\ z=Z+\omega N,$$

получимъ

$$\left.\begin{array}{ll} X=\ \ R\cos\varkappa\delta, & L=\ \ G\cos\varkappa\delta, \\ Y=-\varkappa G\sin\varkappa\delta, & M=-(R/\varkappa)\sin\varkappa\delta, \end{array}\right\} \qquad (19)$$
$$Z=N=0.$$

Эти весьма простыя формулы даютъ намъ возможность изслѣдовать, какъ измѣняются элементы мотора съ перемѣной положенія точки или плоскости приведенія.

Мы знаемъ, что величины X,Y,Z,L,M,N представляютъ собой проэкціи элементовъ G и σ мотора ϱ для точки o на оси x,y,z: первыя три—проэкціи ротора G, а три остальныя—проэкціи вектора σ. Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ поэтому, что ось G и лучъ σ лежатъ въ плоскости xoy перпендикулярной къ ε: плоскость xoy служитъ плоскостью приведенія мотора, и мы имѣемъ такимъ образомъ теорему.

Теорема I.—*Если точка приведенія перемѣщается по прямой перпендикулярной къ оси мотора, то плоскость приведенія остается къ этой прямой перпендикулярной.*

Чтобы имѣть возможность проще выразить законъ, который связываетъ тензоры G и σ и направленія оси G и луча σ въ плоскости xoy, построимъ вспомогательный роторъ P, у котораго ось проходитъ черезъ точку o и лежитъ въ плоскости xoy, а проэкціи P и Q на оси x и y опредѣляются равенствами

$$P=-\varkappa M=R\sin\varkappa\delta,\ Q=\varkappa L=\varkappa G\cos\varkappa\delta. \qquad (20)$$

Тензоръ ротора P связанъ съ тензоромъ σ соотношеніемъ

$$T(P)=\varkappa T(\sigma);$$

ось его перпендикулярна къ лучу σ. Роторъ P тѣсно связанъ съ ротороmъ G′ полярнымъ съ σ:

$$T(P)=T(G'),$$

а ось P съ осью G′ лежатъ въ одной плоскости. Очевидно, что мы съумѣемъ построить векторъ σ, если намъ будетъ данъ

роторъ P, а потому, чтобы раскрыть законъ, о которомъ сейчасъ была рѣчь, достаточно раскрыть зависимость между тензорами роторовъ P и G и направленіями ихъ осей въ плоскости *xoy*. Сдѣлать это не трудно. Уравненія (19) и (20) даютъ намъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{X^2}{R^2}+\frac{Y^2}{\varkappa^2G^2}=1\,,\ \frac{P^2}{R^2}+\frac{Q^2}{\varkappa^2G^2}=1,\\ \frac{XP}{R^2}+\frac{YQ}{\varkappa^2G^2}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Представивъ себѣ на Эвклидовой плоскости коническое сѣченіе съ полуосями R и $\varkappa G$:

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{\varkappa^2G^2}=1,$$

гдѣ x,y прямоугольныя Декартовы координаты, каковое назовемъ направляющей кривой даннаго мотора, изъ разсмотрѣнія ур. (21) выводимъ такую теорему.

Теорема II.—*Тензоры роторовъ* G *и* P *и направленія осей ихъ связаны между собой такъ, какъ связаны длины и направленія двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ направляющей кривой.*

Слѣдствіе I.—Величины

$$J_1=R'^2+\varkappa^2G'^2,\ J_2=2R'G'\cos\varphi,$$

гдѣ R' и G' суть тензоры ротора G и вектора σ, а φ уголъ между лучомъ σ и осью G, не измѣняются съ перемѣной положенія точки приведенія, ибо R' и $\varkappa G'$ суть длины двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ направляющей кривой, уголъ между которыми равняется $\pi/2-\varphi$ (ср. слѣдствіе теор. § 75).

Слѣдствіе II.—Оси роторовъ G и P, опредѣляясь направленіями сопряженныхъ діаметровъ направляющей кривой, образуютъ въ плоскости *xoy* инволюцію. Обозначая черезъ χ уголъ, который двойной лучъ инволюціи (ассимптота къ направляющей кривой) составляетъ съ осью x, мы имѣемъ для него формулу

$$\operatorname{tang}\chi=\pm i\varkappa G/R,$$

сравнивая которую съ формулой для аргумента A мотора (§ 52), мы видимъ теперь какой геометрическій смыслъ имѣетъ аргументъ:

$$i\varkappa A=\pm\chi.$$

Въ параболическомъ пространствѣ направляющая кривая обращается въ прямую $y^2=0$ и инволюція становится параболической. Когда величины R и G дѣйствительны, то въ эллиптическомъ пространствѣ направляющая кривая будетъ эллипсомъ и инволюція эллиптической, а въ гиперболическомъ пространствѣ направляющая кривая будетъ гиперболой и инволюція гиперболической.

Слѣдствіе III.—Если $R=\pm\varkappa G$ то направляющая кривая будетъ кругомъ. Такъ какъ у круга всѣ діаметры равны и сопряженные діаметры взаимно перпендикулярны, то тензоры σ,C и P будутъ оставаться постоянными и лучъ σ будетъ совпадать съ осью C, гдѣ бы ни находилась точка приведенія. Такимъ образомъ черезъ каждую точку пространства будетъ проходить ось мотора, и моторъ будетъ имѣть ∞^2 осей. Мы предоставляемъ читателю самому убѣдиться, помощью формулъ (19), что всѣ оси ξ-параллельны, когда $R=-\varkappa G$, и η-параллельны, когда $R=\varkappa G$ (ср. § 88).

Означая черезъ ψ уголъ между осью x и лучомъ σ, мы опредѣлимъ направленіе луча σ въ плоскости xoy формулой

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{M}{L}=-\frac{R}{G}\cdot\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa\delta,$$

которая можетъ быть представлена въ видѣ

$$\operatorname{tang}\psi=-\frac{R}{G}\,\mathrm{T}(o_1o), \tag{22}$$

если примемъ во вниманіе, что

$$\mathrm{T}(o_1o)=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa\delta.$$

Эта формула вмѣстѣ съ теоремой второй даетъ возможность построить элементы мотора для точки приведенія o, ибо зная уголъ ψ и положеніе луча σ, мы легко построимъ ось P перпендикулярную къ лучу σ, а по направленію оси P найдемъ, пользуясь теоремой, направленіе оси C и тензоры C,P, а также и вектора σ.

Заставимъ точку o перемѣщаться по линіи ε. Когда она совпадаетъ съ пересѣченіемъ ε съ абсолютомъ, то $\mathrm{T}(o_1o)=i/\varkappa$, и формула (22) даетъ для ψ значеніе

$$\psi=\pi/2\pm\chi.$$

Такимъ образомъ, когда точка o приходитъ въ безконечно удаленную точку линіи ε, лучъ σ становится перпендикулярнымъ къ двойному лучу инволюціи, а оси C и P совпадаютъ съ этимъ послѣднимъ и образуютъ съ осью x уголъ $\chi=\pm i\times A$, гдѣ A аргументъ мотора.

Если ось α и линія ε дѣйствительны, причемъ послѣдняя въ случаѣ пространства Лобачевскаго реальна, то $\mathrm{T}(o_1o)$ будетъ величиной дѣйствительной и будетъ возрастать отъ 0 до $+\infty$, когда точка o, выйдя изъ o_1, будетъ перемѣщаться по ε все въ одну и ту же сторону пока не придетъ на ось α', полярную съ α. Въ то же время, какъ видно изъ формулы (22), уголъ ψ будетъ измѣняться отъ 0 до $-\pi/2$, если $R/G>0$ и отъ 0 до $\pi/2$, если $R/G<0$. Припомнивъ, какъ мы выбрали направленіе оси y, мы имѣемъ слѣдовательно теорему.

Теорема III.—*Съ удаленіемъ точки приведенія отъ оси мотора по дѣйствительной и реальной въ случаѣ пространства Лобачевскаго прямой, перпендикулярной къ оси мотора, лучъ вектора вращается въ плоскости приведенія по направленію стрѣлки часовъ (для глаза помѣщеннаго на оси мотора), если параметръ мотора положителенъ, и въ обратномъ направленіи, если онъ отрицателенъ. Безконечно удаленной точкѣ соотвѣтствуютъ ассимптоты направляющей кривой.*

Предыдущія теоремы, которыя выражаютъ собой законы измѣненій элементовъ мотора, мы можемъ представить въ другой формѣ.

Съ этою цѣлью построимъ двѣ взаимно полярныя прямыя ε и ε', пересѣкающія оси α и α' мотора (чертежъ 15). Возьмемъ гдѣ нибудь на линіи ε точку o и означимъ черезъ f,g,o_1,o_2 точки пересѣченія $\alpha,\alpha',\varepsilon$ и ε'. Пусть элементы мотора ϱ

для точки o суть C и σ,

для точки o_1 суть $\mathrm{C}_1=o_2o_1c_1c_2$ и $\sigma_1=o_1c_1$,

для точки o_2 суть $\mathrm{C}_2=o_1o_2c_2c_1$ и $\sigma_2=o_2c_2$.

Мы знаемъ, что

$$\sigma=\mathrm{км}_o(\sigma_1)+\mathrm{мм}_o(\mathrm{C}_1),\quad \mathrm{C}=\mathrm{мм}_o(\sigma_1)+\mathrm{км}_o(\mathrm{C}_1).$$

Мы знаемъ кромѣ того, что лучи $\mathrm{км}_o(\sigma_1)$, $\mathrm{мм}_o(\mathrm{C}_1)$ и оси $\mathrm{мм}_o(\sigma_1)$ и $\mathrm{км}_o(\mathrm{C})$ всѣ перпендикулярны къ линіи ε (§ 34). Изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуетъ поэтому, что линія ε будетъ перпендикулярна къ лучу σ и къ оси C, слѣдовательно и къ плоскости приведенія, соотвѣтствующей точкѣ o. Эта плоскость пройдетъ черезъ линію ε' и будетъ вращаться

вокругъ ε', когда точка o будетъ перемѣщаться по ε. Мы доказали такимъ образомъ снова теорему I, которую можемъ формулировать иначе:

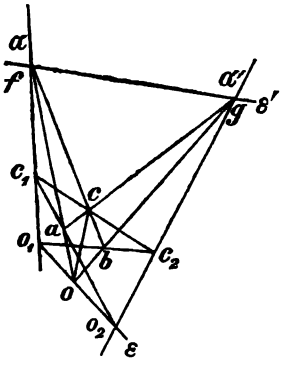
Теорема IV.

Если точка приведенія перемѣщается по прямой, пересѣкающей двѣ взаимно полярныя оси мотора, то плоскость приведенія вращается вокругъ прямой полярной съ первой.

Если плоскость приведенія вращается вокругъ прямой, пересѣкающей двѣ взаимно полярныя оси мотора, то точка приведенія перемѣщается по прямой полярной съ первой.

Разсѣчемъ тетраэдръ $o_1c_1o_2c_2$ плоскостью ofg, которая представляетъ собой плоскость приведенія, соотвѣтствующую точкѣ o. Мы получимъ прямыя oaf, obg, bcf, acg; линія oaf,

Чертежъ 15.



пересѣкая взаимно полярныя прямыя ε и ε', будетъ къ ε перпендикулярна; линіи o_1o_2 и c_1o_2, пересѣкая α и α', будутъ перпендикулярны къ α; поэтому

$$oa = \text{км}_o(\sigma). \qquad \S\ 34_4$$

Точка g пересѣченія α' съ ε' будетъ полюсомъ плоскости o_1fo_2, которая проходитъ черезъ ихъ поляры α и ε; линія og слѣдовательно перпендикулярна къ начальной плоскости o_1fo_2 ротора $\mathrm{C} = o_2o_1c_1c_2$ и

$$ob = \text{мм}_o(\mathrm{C}_1). \qquad \S\ 34_6$$

Такъ какъ точка o лежитъ на линіи ε, то плоскость полярная съ o пройдетъ черезъ линію ε', и, припоминая правило четыреугольника, изъ чертежа мы видимъ, что

$$oc = oa + ob = \text{км}_o(\sigma_1) + \text{мм}_o(\mathrm{C}_1) = \sigma.$$

Такимъ образомъ, если мы точку приведенія o примемъ за начало вектора мотора, то конецъ вектора будетъ въ точкѣ a пересѣченія линіи a_1a_2, положеніе которой не зависитъ отъ положенія точки o на линіи ε, съ плоскостью приведенія. Итакъ имѣемъ такую теорему, правая половина которой выводится изъ лѣвой помощью принципа двойственности.

Теорема V.

Если, принимая точку приведенія за начало вектора мотора, мы будемъ перемѣщать ее по прямой, перескающей двѣ взаимно полярныя оси мотора, то конецъ вектора будетъ перемѣщаться по такой же прямой.

Если, принимая плоскость приведенія за начало ротора мотора, мы будемъ вращать ее вокругъ прямой, перескающей двѣ взаимно полярныя оси мотора, то конецъ ротора будетъ вращаться вокругъ такой же прямой.

Читатель знакомый съ формулами тригонометріи легко можетъ доказать эту теорему помощію формулъ (19) и обратно изъ теоремы вывести эти послѣднія.

Мы увидимъ въ слѣдующихъ параграфахъ, что всякій моторъ имѣетъ по крайней мѣрѣ двѣ взаимно полярныя оси, которыя въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ касаться къ абсолюту (Л-моторъ, § 91) и даже совпадать съ одной и той же образующей абсолюта (см. § 90). Теоремы доказанныя нами въ этомъ параграфѣ примѣнимы поэтому ко всякому мотору, но будутъ нѣсколько видоизмѣняться въ зависимости отъ положенія его осей. Прослѣдить эти видоизмѣненія мы предоставляемъ самому читателю.

Обратимся теперь къ подробному изслѣдованію свойствъ моторовъ каждаго класса и типа отдѣльно.

87. **Моторы перваго типа.**—У мотора перваго типа ни одна изъ стрѣлокъ не равняется нулю; слѣдовательно для каждой точки и для каждой плоскости приведенія оси стрѣлокъ мотора имѣютъ вполнѣ опредѣленныя направленія.

Докажемъ нѣсколько общихъ всѣмъ моторамъ перваго типа теоремъ.

Возьмемъ два вектора ox и oy (см. чертежъ 16) съ общимъ началомъ o и концами x и y. Продолживъ линіи ox, oy и xy до пересѣченія съ плоскостью O, полярной съ o, въ точкахъ a, b и d, проведемъ прямыя xb, ya и od. Точки z и t,

въ которыхъ прямая xb пересѣчется съ прямыми ya и od будутъ концами векторовъ

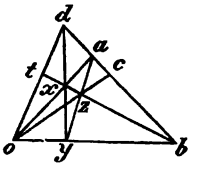
$$oz=ox+oy,\ ot=ox-oy.$$

Если проведемъ еще прямую oz, пересѣченіе которой съ ab означимъ черезъ c, то мы получимъ полный четыреугольникъ $oxyz$. Двѣ его стороны ox и yz проходятъ черезъ точку a, двѣ другія xz и oy—черезъ точку b, пятая oz—черезъ c и шестая xy—черезъ d. Точка c поэтому гармонично сопряжена съ d относительно точекъ a и b, а лучъ ot съ лучомъ oz относительно лучей ox и oy. Разсматривая относительное расположеніе осей роторовъ OX,OY и

$$OZ=OX+OY,\ OT=OX-OY,$$

мы придемъ, какъ видно изъ принципа двойственности, къ такому же результату: ось OZ гармонично сопряжена съ OT относительно осей OX и OY.

Чертежъ 16.



Итакъ мы можемъ считать доказаннымъ, что оси роторовъ

$$\underset{\sim}{o}\xi+\underset{\sim}{o}\eta,\ \underset{\sim}{o}\xi-\underset{\sim}{o}\eta$$

гармонично сопряженны съ осями стрѣлокъ $\underset{\sim}{o}\xi$ и $\underset{\sim}{o}\eta$ мотора $\underset{\sim}{o}$. Но равенства (18) показываютъ намъ, что ось G совпадаетъ съ осью перваго изъ этихъ роторовъ, а лучъ σ съ осью второго; мы имѣемъ слѣдовательно такую теорему.

Теорема I. — *Роторъ, векторъ и стрѣлки мотора, построенные для одной и той же точки или плоскости приведенія, обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: ось ротора, лучъ вектора и оси стрѣлокъ проходятъ черезъ одну точку, лежатъ въ одной плоскости и первыя двѣ прямыя гармонично сопряжены съ двумя послѣдними.*

Пусть β и γ суть оси стрѣлокъ $\underset{\sim}{o}\xi$ и $\underset{\sim}{o}\eta$, построенныхъ для одной и той же точки приведенія b. Означая точки пе-

ресѣченія β и γ съ абсолютомъ буквами b_1, b_2 и c_1, c_2 соотвѣтственно (см. чертежъ 14) проведемъ черезъ b_1, b_2, c_1, c_2 образующія абсолюта, черезъ b_1 и b_2—образующія η_1 и η_2, которыя принадлежатъ къ системѣ η, черезъ c_1 и c_2—образующія ξ_1 и ξ_2, которыя принадлежатъ къ системѣ ξ. Такъ какъ оси ξ-стрѣлокъ всѣ между собой η-параллельны, а оси η-стрѣлокъ ξ-параллельны, то оси ξ-стрѣлокъ мотора всѣ пересѣкутъ прямыя ξ_1 и ξ_2, а оси η-стрѣлокъ—прямыя η_1 и η_2. Итакъ всякій моторъ перваго типа опредѣляетъ четыре образующія абсолюта по двѣ изъ каждой системы.

∞^1 поверхностей Clifford'a, которыя можно провести черезъ прямыя $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ мы будемъ называть поверхностями Clifford'a даннаго мотора. Оси этихъ поверхностей, пересѣкая всѣ четыре образующихъ $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, будутъ ξ-параллельны съ β и η-параллельны съ γ и на основаніи теоремы I § 84 совпадутъ съ осями мотора. Итакъ каждый моторъ перваго типа опредѣляетъ ∞^1 поверхностей Clifford'a, для которыхъ оси мотора служатъ осями; черезъ каждую точку проходитъ и ко всякой плоскости касается одна изъ этихъ поверхностей.

Вообразивъ одну изъ поверхностей Clifford'a даннаго мотора, поверхность C, которая предположимъ проходитъ черезъ точку b и оси β и γ, будемъ изслѣдовать какъ измѣняются элементы мотора, когда точка приведенія будетъ перемѣщаться по поверхности или когда плоскость приведенія, перемѣщаясь, будетъ оставаться къ поверхности касательной.

1. Такъ какъ образующія одной системы поверхности C ξ-параллельны съ β, а съ другой—η-параллельны съ γ, то для точекъ приведенія, находящихся на C, и для плоскостей приведенія касательныхъ къ C образующія одной системы поверхности C будутъ служить осями ξ-стрѣлокъ, а образующія другой системы—осями η-стрѣлокъ. На основаніи выше доказанной теоремы для каждой точки приведенія (плоскости приведенія) ось ротора и лучъ вектора гармонично сопряжены съ двумя прямолинейными производящими поверхности проведенными черезъ точку (въ плоскости) приведенія.

2. Всякій моторъ устанавливаетъ нѣкоторое соотвѣтствіе между точками и плоскостями пространства. Если какую нибудь точку x примемъ за точку приведенія, то ось ротора и лучъ вектора пройдутъ черезъ x и будутъ лежать въ плоскости X, которая и будетъ плоскостью приведенія соотвѣтствующею точкѣ x. Обратно, если плоскость X примемъ за плоскость приведенія мотора, то ось ротора и лучъ вектора будутъ лежать на X и пересѣкутся въ точкѣ x, которая и

будетъ точкой приведенія соотвѣтствующей плоскости X. Такимъ образомъ каждой точкѣ соотвѣтствуетъ плоскость черезъ нее проходящая, каждой плоскости точка на ней лежащая.

Предположимъ, что точка x совпадаетъ съ b. Такъ какъ линіи β и γ служатъ осями η- и ξ-стрѣлокъ для точки b и такъ какъ ось ротора и лучъ вектора лежатъ съ ними въ одной плоскости, то плоскость $\beta\gamma$, которая касается къ C въ точкѣ b, будетъ плоскостью приведенія, соотвѣтствующею точкѣ b. Итакъ для точки приведенія, лежащей на поверхности C, плоскость приведенія касается C, для плоскости приведенія, касательной къ C, точкой приведенія служитъ точкой касанія.

3. Означая черезъ φ уголъ между производящими β и γ поверхности C, изъ соотношеній (18) выводимъ

$$4\mathrm{T}^2(\mathrm{C})=\mathrm{T}^2(\varrho_\xi)+\mathrm{T}^2(\varrho_\eta)+2\mathrm{T}(\varrho_\xi)\mathrm{T}(\varrho_\eta)\cos\varphi,$$
$$4\varkappa^2\mathrm{T}^2(\sigma)=\mathrm{T}^2(\varrho_\xi)+\mathrm{T}^2(\varrho_\eta)+2\mathrm{T}(\varrho_\xi)\mathrm{T}(\varrho_\eta)\cos\varphi.$$

Такъ какъ каждыя двѣ производящія поверхности C образуютъ одинъ и тотъ же уголъ φ, то изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что съ перемѣщеніемъ точки (плоскости) * приведенія по поверхности C тензоры ротора и вектора не измѣняются.

Углы между осью C, лучомъ σ и осями ϱ_ξ и ϱ_η опредѣляются, какъ мы знаемъ (§ 60), отношеніями тензоровъ

$$\mathrm{T}(\mathrm{C}),\ \mathrm{T}(\sigma),\ \mathrm{T}(\varrho_\xi),\ \mathrm{T}(\varrho_\eta).$$

Но эти послѣдніе не зависятъ отъ положенія точки (плоскости) приведенія на поверхности C, а потому и углы между осью ротора лучомъ вектора и производящими поверхности C, проведенными черезъ точку (въ плоскости) приведенія остаются постоянными, пока точка (плоскость) приведенія перемѣщается по поверхности.

Если прямая ε_1 касается къ абсолюту, а прямая ε пересѣкается съ ε_1 въ точкѣ прикосновенія, или лежитъ въ плоскости проведенной черезъ ε_1 и касательной къ абсолюту, то ε и ε_1 мы можемъ считать взаимно перпендикулярными, ибо въ этихъ случаяхъ линія ε_1 пересѣкаетъ не только ε, но и

---

* Подъ словами «плоскость перемѣщается по поверхности C» мы подразумѣваемъ конечно «плоскость перемѣщается, оставаясь къ C касательной».

ея поляру. Принимая это во вниманіе, нетрудно видѣть, что поверхность Clifford'a какова бы она ни была, будетъ ли она пересѣкаться съ абсолютомъ по четыремъ прямымъ или будетъ касаться къ абсолюту вдоль одной или двухъ его прямолинейныхъ образующихъ, обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: нормали къ поверхности и линіи проведенныя въ касательныхъ плоскостяхъ и перпендикулярныя къ соотвѣтствующимъ точкамъ прикосновенія перпендикулярны ко всѣмъ осямъ поверхности.

Проведемъ черезъ какую нибудь точку x поверхность Clifford'a C соотвѣтствующую данному мотору и плоскость X къ ней касательную. Нормаль къ поверхности C въ точкѣ x, которая будетъ также перпендикулярна къ X, и линія, лежащая въ X и перпендикулярная къ x, обѣ будутъ перпендикулярны ко всѣмъ осямъ поверхности C. Но оси C совпадаютъ съ осями мотора, а плоскость X служитъ плоскостью приведенія для точки x; мы имѣемъ слѣдовательно такую теорему общую всѣмъ моторамъ перваго типа.

Теорема II.

Линіи перпендикулярныя къ плоскостямъ приведенія и проведенныя черезъ соотвѣтствующія точки приведенія перпендикулярны ко всѣмъ осямъ мотора.

Линіи перпендикулярныя къ точкамъ приведенія и лежащія въ соотвѣтствующихъ имъ плоскостяхъ приведенія перпендикулярны ко всѣмъ осямъ мотора.

Эта теорема даетъ намъ новый способъ построить оси мотора, если мы знаемъ для двухъ точекъ соотвѣтствующія имъ плоскости приведенія: проводимъ черезъ точки прямыя перпендикулярныя къ плоскостямъ (или въ плоскостяхъ прямыя перпендикулярныя къ точкамъ), общіе къ этимъ прямымъ перпендикуляры будутъ осями мотора.

88. **Моторы второго типа.**—У мотора второго типа одна изъ стрѣлокъ равняется нулю. Если равняется нулю стрѣлка ϱ_{τ_i}, то равенства (18), которыя связываютъ между собой роторъ и векторъ мотора съ его стрѣлками, обращаются въ слѣдующія

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\varrho_\xi, \quad \sigma=\frac{\omega}{2\varkappa}\varrho_\xi.$$

Они показываютъ намъ, во-первыхъ, что тензоры $\mathfrak{C}$ и σ пропорціональны тензору стрѣлки ϱ_ξ:

$$T(\mathfrak{C})=\frac{1}{2}T(\varrho_\xi), T(\sigma)=\frac{1}{2\varkappa}T(\varrho_\xi)$$

и во-вторыхъ, что ось стрѣлки ϱ_ξ служитъ осью для $\mathfrak{C}$ и лучомъ для σ. Эти заключенія остаются справедливы, гдѣ бы ни находилась точка приведенія. Поэтому, припоминая теорему II § 78, мы видимъ, что нашъ моторъ будетъ обладать такими свойствами: черезъ каждую точку проходитъ и въ каждой плоскости лежитъ ось мотора совпадающая съ осью ξ-стрѣлки построенной для этой точки или плоскости, всѣ оси мотора между собой γ-параллельны, одинаковымъ направленіямъ ихъ соотвѣтствуютъ равные тензоры и, наконецъ, тензоры ротора и вектора съ перемѣщеніемъ точки или плоскости приведенія не измѣняются.

Подобными же свойствами будетъ обладать моторъ, у котораго стрѣлка ϱ_ξ равняется нулю, съ тѣмъ отличіемъ отъ мотора, который мы сейчасъ разсматривали, что всѣ оси его будутъ ξ-параллельны. Итакъ мы имѣемъ такую теорему.

Теорема.—*Моторъ второго типа имѣетъ* ∞^2 *осей, которыя всѣ* ξ*-параллельны, если* ξ*-стрѣлка равняется нулю и* γ_i*-параллельны, если* γ_i*-стрѣлка равняется нулю. Черезъ каждую точку проходитъ и въ каждой плоскости лежитъ одна и только одна ось мотора. Тензоры ротора и вектора съ измѣненіемъ положенія точки или плоскости приведенія не измѣняются.*

89. **Моторы третьяго типа.**—У мотора ϱ третьяго типа обѣ стрѣлки равняются нулю. Такъ какъ

$$\varrho = \varrho_\xi \xi + \varrho_\eta \gamma_i,$$

то моторъ третьяго типа въ пространствѣ неевклидовомъ равняется нулю. Въ пространствѣ же Эвклида обѣ стрѣлки мотора совпадаютъ съ его роторомъ, и моторъ, у котораго роторъ равняется нулю, будетъ моторомъ третьяго типа.

90. **Моторы перваго класса.** — У мотора перваго класса тензоры обѣихъ стрѣлокъ отличны отъ нуля; онъ характеризуется слѣдовательно двумя условіями

$$\mathfrak{I}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{I}_2 \neq 0. \tag{23}$$

Такъ какъ для мотора перваго класса оси β и γ стрѣлокъ не имѣютъ абсолютнаго направленія, то всѣ четыре точки, b_1, b_2, c_1, c_2, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ абсолютъ, раздѣльны (§ 87), и существуетъ двѣ и только двѣ взаимно полярныхъ линіи α и α', которыя ξ-параллельны съ β и η-па-

раллельны съ γ. Только эти двѣ прямыя линіи по теоремѣ I § 84 и будутъ осями мотора ϱ.

Мы показали въ § 55_6, что одно изъ направленій линіи α одинаково, а другое различно съ направленіями β и γ. Первому по теоремѣ I § 84 будетъ соотвѣтствовать тензоръ

$$H= \quad T_{\xi\xi}+T_{\eta\eta}=H_1= \quad =R_1+\omega G_1,$$

а второму $H=-T_{\xi\xi}-T_{\eta\eta}=H_2=-H_1=R_2+\omega G_2$.

Мы видѣли также, что одно изъ направленій линіи α' одинаково съ γ и различно съ β, а другое одинаково съ β и различно съ γ. Первому будетъ соотвѣтствовать тензоръ

$$H= \quad T_{\xi\xi}-T_{\eta\eta}=H_3= \quad \omega H_1/\varkappa=R_3+\omega G_3,$$

а второму $H=-T_{\xi\xi}+T_{\eta\eta}=H_4=-\omega H_1/\varkappa=R_4+\omega G_4$.

Въ разсматриваемомъ нами случаѣ всѣ четыре образующія $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ раздѣльны и не сливаются, и поверхности Clifford'a не касаются къ абсолюту. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема I.—*Моторъ перваго класса имѣетъ четыре различныхъ тензора и двѣ взаимно полярныхъ, не касательныхъ къ абсолюту оси. Поверхности Clifford'a мотора пересѣкаются съ абсолютомъ по четыремъ раздѣльнымъ прямымъ.*

Къ такимъ же результатамъ приводитъ насъ и второй данный въ § 84 методъ построенія осей мотора. Дѣйствительно, когда тензоръ мотора имѣетъ четыре различныхъ значенія, то третье изъ ур. (4) имѣетъ только такія рѣшенія

$$\vartheta_3=\pi/2+m\pi,$$

гдѣ m какое нибудь цѣлое число. Всѣ оси мотора должны слѣдовательно пересѣкать ось z подъ прямымъ угломъ и опредѣляться ур. (9). Если при $H=H_1$ изъ этихъ уравненій мы находимъ $\vartheta_3=\vartheta_0$, то рѣшенія ихъ будутъ таковы

$$H=H_1,\vartheta_3=\vartheta_0 \quad ; \quad H=H_2,\vartheta_3=\vartheta_0+\pi$$
$$H=H_3,\vartheta_3=\vartheta_0+\pi\eta; \quad H=H_4,\vartheta_3=\vartheta_0+\pi\xi.$$

Построивъ двѣ взаимно полярныхъ прямыхъ линіи α и α', которыя пересѣкаютъ ось z подъ прямымъ угломъ и образуютъ съ осью x первая уголъ ϑ_0, а вторая $\vartheta_0+\pi\eta$, изъ этой таблицы рѣшеній мы видимъ, что линія α будетъ осью

мотора, соотвѣтствующею тензорамъ H_1 и H_2, а линія α'— осью, соотвѣтствующею тензорамъ H_3 и H_4.

Обращаясь къ болѣе подробному изслѣдованію свойствъ мотора перваго класса въ пространствахъ эллиптическомъ, гиперболическомъ и параболическомъ, мы должны сначала выяснить, какимъ условіямъ должны удовлетворять алгебраическія проэкціи и составляющія мотора для того, чтобы онѣ опредѣляли дѣйствительный моторъ.

Если моторъ и оси координатъ x,y,z дѣйствительны, то таковы же будутъ и геометрическія проэкціи и составляющія мотора по координатнымъ осямъ; таковы же* будутъ поэтому и алгебраическія проэкціи и составляющія (которыя, какъ мы знаемъ, представляютъ собой тензоры геометрическихъ) при томъ однако условіи, что въ случаѣ гиперболическаго пространства оси x,y,z не только дѣйствительны, но и реальны. Обратно, дѣйствительныя проэкціи и составляющія на осяхъ, удовлетворяющихъ указаннымъ сейчасъ условіямъ, очевидно опредѣляютъ дѣйствительный моторъ. Слѣдовательно для того, чтобы моторъ былъ дѣйствителенъ необходимо и достаточно, чтобы таковы же были его проэкціи и составляющія на дѣйствительныхъ и реальныхъ въ случаѣ пространства Лобачевскаго осяхъ.

Итакъ предположимъ, что намъ данъ дѣйствительный моторъ; посмотримъ, каковы будутъ его тензоры и оси въ пространствахъ эллиптическомъ и гиперболическомъ.

Въ пространствѣ Лобачевскаго, когда $\varkappa$ число чисто мнимое, $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$, какъ видно изъ (167) § 79, будутъ числами мнимыми и сопряженными. Поэтому, если подъ T_ξ и T_η будемъ подразумѣвать тѣ значенія

$$\sqrt{\mathfrak{I}_1} \quad \text{и} \quad \sqrt{\mathfrak{I}_2},$$

которыя также мнимы и сопряженны, то R_1,G_1,R_2,G_2 будутъ числами дѣйствительными, а R_3,G_3,R_4,G_4 — чисто мнимыми. Уравненіе (14) даетъ для $\operatorname{tang}\theta_1$ и θ_1 величины дѣйствительныя для всѣхъ тензоровъ. Такъ какъ

$$\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\varkappa\delta_1=\frac{1}{i\varkappa}\operatorname{tanh}i\varkappa\delta_1,$$

---

*) Во избѣжаніе недоразумѣній замѣчу, что число $x_1+\omega x_2$ я называю вещественнымъ, когда $x_2=0$, комплекснымъ, когда x_2 не равняются нулю, дѣйствительнымъ, когда числа x_1 и x_2 дѣйствительны, и мнимымъ, когда одно изъ чиселъ x_1 и x_2 или оба мнимы.

то ур. (13) будетъ имѣть дѣйствительные корни, только тогда, когда вторая часть его будетъ по абсолютной величинѣ меньше—$1/ix$. Докажемъ, что при R и G дѣйствительныхъ это условіе будетъ соблюдено. Положивъ съ этою цѣлью для краткости

$$\sin\vartheta_1 = a_1 + \omega a_2,\ \cos\vartheta_1 = b_1 + \omega b_2,$$

мы можемъ представить уравненіе, о которомъ идетъ рѣчь, въ видѣ

$$\frac{1}{x}\operatorname{tang} x\delta_1 = a_2/b_1 = -b_2/a_1 .$$

Исключивъ b_1 изъ уравненій

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,\ a_1^2 + b_1^2 + x^2(a_2^2 + b_2^2) = 1,$$

вытекающихъ изъ тожества

$$\cos^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_1 = 1,$$

мы получимъ

$$(a_2^2 + b_2^2)(a_1^2 + x^2 b_1^2) = b_2^2.$$

Отсюда, когда R и G, а слѣдовательно и a_1, b_1, a_2, b_2 дѣйствительны, имѣемъ

$$a_1^2 > (ixb_2)^2.$$

Такимъ образомъ, при R и G дѣйствительныхъ изъ ур. (13) мы получаемъ дѣйствительное значеніе для δ_1, и дѣйствительнымъ тензорамъ H_1 и H_2 будетъ соотвѣтствовать дѣйствительная и реальная ось. Вторая ось, которая соотвѣтствуетъ мнимымъ тензорамъ, будучи полярна съ первой, идеальна, и мы имѣемъ такимъ образомъ теорему.

Теорема II.—*У дѣйствительнаго мотора въ пространствѣ Лобачевскаго два тензора дѣйствительны и два чисто мнимы; дѣйствительнымъ соотвѣтствуетъ реальная, а мнимымъ идеальная ось.*

Въ пространствѣ эллиптическомъ, когда x дѣйствительно, $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ будутъ дѣйствительны и положительны, будутъ дѣйствительны и всѣ тензоры мотора. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ въ первыхъ частяхъ ур. (13) и (14) стоятъ круговые тангенсы, то искомыя величины для всѣхъ тензоровъ будутъ дѣйствительны. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема III.—*У дѣйствительнаго мотора въ пространствѣ эллиптическомъ всѣ тензоры и оси дѣйствительны.*

Предполагая, что $\varkappa$ дѣйствительно и безконечно мало и ограничиваясь первою степенью $\varkappa$, мы получимъ изъ (166) и (169) § 79

$$T_\xi=\sqrt{\mathfrak{I}_1}=\sqrt{J_1}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\frac{J_2}{J_1}\right),\quad T_\eta=\sqrt{\mathfrak{I}_2}=\sqrt{J_2}\left(1-\frac{\varkappa}{2}\frac{J_2}{J_1}\right)$$

и затѣмъ $$H_1=\sqrt{J_1}\left(1+\omega\frac{J_2}{J_1}\right),\quad H_2=-H_1 \qquad (24)$$

$$H_3=\frac{\omega}{\varkappa}H_1=\sqrt{J_1}\left(\varkappa\frac{J_2}{J_1}+\frac{\omega}{\varkappa}\right),\quad H_4=-H_3. \qquad (25)$$

Отсюда, полагая $\varkappa=0$, мы видимъ, что въ Эвклидовомъ пространствѣ два тензора H_1 и H_2 конечны и два другихъ H_3 и H_4 безконечно велики.

Для первыхъ двухъ величины R и G конечны и формулы (16) и (14), которыя теперь принимаютъ видъ

$$\delta_1=\frac{XM-YN}{R^2},\quad \operatorname{tang}\theta_1=\frac{Y}{X}$$

даютъ конечныя значенія для δ_1 и θ_1: первымъ двумъ тензорамъ соотвѣтствуетъ ось, находящаяся на конечномъ разстояніи. Вторая ось, соотвѣтствующая другимъ двумъ тензорамъ, полярна съ первой, она слѣдовательно къ первой перпендикулярна и лежитъ въ безконечно удаленной плоскости. Въ этомъ можно также убѣдиться и при помощи формулъ (13) и (14). Внося въ нихъ сначала вмѣсто R и G ихъ выраженія, взятые изъ (25) мы увидимъ, что δ_1 будетъ содержать множителемъ $\varkappa^{-1}$, а

$$\operatorname{tang}\theta_1=-\frac{X}{Y}(1+\varkappa^2 a)$$

гдѣ a величина, остающаяся конечной при $\varkappa=0$. Если поэтому положимъ $\varkappa=0$, то получимъ

$$\delta_1=\infty,\quad \operatorname{tang}\theta_1=-X/Y,$$

откуда и слѣдуетъ, что вторая ось находится въ безконечно удаленной плоскости и перпендикулярна къ первой. Когда моторъ дѣйствителенъ, то $J_1>0$ и всѣ тензоры и оси дѣйствительны. Итакъ имѣемъ теорему

Теорема IV.—*У мотора въ Эвклидовомъ пространствѣ два тензора конечны, два безконечно велики; конечнымъ соотвѣтствуетъ ось на конечномъ разстояніи, безконечно-большимъ—безконечно удаленная ось. У дѣйствительнаго мотора тензоры и оси дѣйствительны.*

Разсмотримъ нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ предыдущихъ теоремъ.

Если $J_2=0$, $J_1\neq 0$, то

$$\mathfrak{I}_1=\mathfrak{I}_2=J_1$$

и моторъ принадлежитъ къ первому классу. Въ этомъ случаѣ

$$H_1=\sqrt{J_1},\ H_2=-\sqrt{J_1},\ H_3=\frac{\omega}{\varkappa}\sqrt{J_1},\ H_4=-\frac{\omega}{\varkappa}\sqrt{J_1}.$$

Пусть ось α соотвѣтствуетъ тензорамъ H_1 и H_2, ось α'—тензорамъ H_3 и H_4. Припоминая геометрическое значеніе тензора мотора, имѣющаго ось не касающуюся къ абсолюту, легко видѣть, что моторъ будетъ эквивалентенъ одному ротору съ тензоромъ $\sqrt{J_1}$, когда точку приведенія возьмемъ на α и вектору съ тензоромъ $\sqrt{J_1}/\varkappa$, когда точку приведенія возьмемъ на α'. Обратно, если моторъ состоитъ изъ одного ротора съ тензоромъ R или одного вектора съ тензоромъ G, то $H^2=R^2$ въ первомъ случаѣ и $H^2=\varkappa^2G^2$ во второмъ. Въ обоихъ случаяхъ $J_1\neq 0$ и $J_2=0$. Итакъ, для того, чтобы моторъ былъ эквивалентенъ ротору или вектору необходимо и достаточно, чтобы $J_1\neq 0$ и $J_2=0$.

Предположимъ, что при условіи $J_1\neq 0, J_2=0$ координаты мотора дѣйствительны.

Тогда, когда видно изъ теоремы III, въ эллиптическомъ пространствѣ векторъ и роторъ эквивалентные мотору будутъ дѣйствительны.

Въ пространствѣ гиперболическомъ при чисто мнимомъ $\varkappa$ инваріантъ J_1 можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Если $J_1>0$, то H_1, H_2 дѣйствительны и H_3, H_4 мнимы; если $J_1<0$, то наоборотъ H_3, H_4 дѣйствительны и H_1, H_2 мнимы. Такимъ образомъ (теорема II) въ гиперболическомъ пространствѣ роторъ и векторъ эквивалентные мотору оба дѣйствительны; ось ротора реальна и лучъ вектора идеаленъ, когда $J_1>0$; ось ротора идеальна и лучъ вектора реаленъ, $J_1<0$.

Въ параболическомъ пространствѣ инваріантъ J_1 положителенъ и конечные тензоры (24) дѣйствительны. Поэтому

въ параболическомъ пространствѣ моторъ эквивалентенъ дѣйствительному ротору съ осью на конечномъ разстояніи.

90. **Моторы второго класса.**—У мотора второго класса тензоръ одной изъ стрѣлокъ равняется нулю. Моторъ второго класса характеризуется поэтому однимъ изъ двухъ условій

$$\mathfrak{I}_1=0,\ \mathfrak{I}_2\neq 0,\quad \text{или}\quad \mathfrak{I}_1\neq 0,\ \mathfrak{I}_2=0. \tag{26}$$

и имѣетъ два тензора $H=\pm T_{\eta\eta}$

въ первомъ случаѣ и два тензора

$$H=\pm T_{\xi\xi}$$

во второмъ. Моторы второго класса могутъ быть двухъ типовъ.

1. Моторы, у которыхъ одна стрѣлка имѣетъ абсолютное направленіе.

2. Моторы, у которыхъ одна стрѣлка равняется нулю. Эти моторы мы будемъ называть C-моторами. Моторъ второго типа мы будемъ называть также ξ-моторомъ, если равняется нулю η-стрѣлка, и η-моторомъ, если равняется нулю ξ-стрѣлка.

Разсмотримъ сначала моторы перваго типа.

Если ось β η-стрѣлки касается къ абсолюту въ точкѣ b_1, а ось γ ξ-стрѣлки не имѣетъ абсолютнаго направленія, но пересѣкается съ абсолютомъ въ двухъ раздѣльныхъ точкахъ c_1 и c_2, то

$$T^2{}_{\eta}=\mathfrak{I}_2=0,\quad H=\pm T_{\xi\xi}.$$

Мы доказали въ § 55_6, что въ этомъ случаѣ существуетъ только одна прямая, которая ξ-параллельна съ β и η-параллельна съ γ, а именно образующая η_1 абсолюта, которая проходитъ черезъ точку b_1 касанія β и принадлежитъ къ системѣ η. Эта прямая η_1 и будетъ единственною осью мотора. Одному ея направленію соотвѣтствуетъ тензоръ $H=+T_{\xi\xi}$, другому $H=-T_{\xi\xi}$.

Когда ось β касается къ абсолюту, то точка b_2 совпадаетъ съ b_1 (§ 87), а образующая η_2 и η_1. Поэтому поверхности Clifford'a, соотвѣтствующія нашему мотору, будутъ касаться къ абсолюту вдоль прямой η_1, т. е. вдоль оси мотора.

Если $\mathfrak{I}_1=0$ и ось γ ξ-стрѣлки касается къ абсолюту въ точкѣ c_1, а ось β η-стрѣлки пересѣкается съ абсолютомъ въ двухъ раздѣльныхъ точкахъ b_1 и b_2 (§ 87), то образующая ξ_2 совпадаетъ съ ξ_1 и служитъ осью мотора. Поверх-

ности Clifford'a соотвѣтствующія мотору касаются къ абсолюту вдоль прямой ξ_1. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема I.—*Если моторъ второго класса принадлежитъ къ первому типу, то онъ имѣетъ одну ось; осью служитъ образующая абсолюта, которая принадлежитъ къ системѣ ξ, когда $H=\pm T_{\eta\eta}$, и къ системѣ η, когда $H=\pm T_{\xi\xi}$. Поверхности Clifford'a для мотора касаются къ абсолюту вдоль оси мотора.*

Для мотора второго класса теорема II § 87 обращается въ слѣдующую.

Теорема II.

У мотора второго класса и перваго типа линіи перпендикулярныя къ плоскостямъ приведенія и проведенныя черезъ соотвѣтствующія точки приведенія пересѣкаютъ одну и ту же производящую абсолюта—ось мотора.

У мотора второго класса и перваго типа линіи перпендикулярныя къ точкамъ приведенія и лежащія въ соотвѣтствующихъ имъ плоскостяхъ приведенія пересѣкаютъ одну и ту же производящую абсолюта—ось мотора.

Моторы второго типа мы уже подробно разсматривали въ § 88. Такъ какъ у мотора второго класса ось не равной нулю стрѣлки не касается къ абсолюту, то теорему § 88 мы можемъ формулировать теперь слѣдующимъ образомъ.

Теорема III.—*C-моторъ имѣетъ ∞^2 осей, которыя не касаются къ абсолюту и всѣ ξ- или η- параллельны, смотря по тому имѣетъ ли тензоръ видъ $H=\pm T_{\eta\eta}$, или $H=\pm T_{\xi\xi}$. Одинаковымъ направленіямъ осей соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ-же тензоръ.*

Разсмотримъ въ какихъ случаяхъ моторъ второго класса можетъ существовать и быть дѣйствительнымъ.

Въ пространствѣ Лобачевскаго для дѣйствительнаго мотора инваріанты J_1 и J_2 дѣйствительны и каждое изъ равенствъ

$$\mathfrak{J}_1=J_1+\varkappa J_2=0,\ \mathfrak{J}_2=J_1-\varkappa J_2=0,$$

распадаясь на два $J_1=0$ и $J_2=0$, влечетъ за собой другое, что противорѣчитъ условіямъ (26). Поэтому въ пространствѣ Лобачевскаго моторъ второго класса дѣйствительнымъ быть не можетъ.

Если оси координатъ прямоугольны, то инваріанты $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ имѣютъ видъ

$$\mathfrak{J}_1=\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2,\ \mathfrak{J}_2=\mathfrak{L}^2+\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2.$$

Поэтому, когда моторъ и $\varkappa$ дѣйствительны изъ условій (26) слѣдуетъ или

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0, \text{ или } \mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=0.$$

Въ первомъ случаѣ ξ-стрѣлка равняется нулю и моторъ представляетъ собой η-моторъ, во второмъ η-стрѣлка равняется нулю и моторъ представляетъ собой ξ-моторъ. Такимъ образомъ дѣйствительный моторъ второго класса въ эллиптическомъ пространствѣ необходимо долженъ быть C-моторомъ.

Въ параболическомъ пространствѣ $\mathfrak{I}_1=\mathfrak{I}_2=J_1$ и условія (26) несовмѣстны: въ Эвклидовомъ пространствѣ совсѣмъ нѣтъ моторовъ второго класса. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема IV.—*Моторъ второго класса можетъ существовать только въ пространствѣ неевклидовомъ и быть дѣйствительнымъ въ пространствѣ эллиптическомъ, когда онъ представляетъ собой C-моторъ.*

91. **Моторы третьяго класса.**—У мотора третьяго класса тензоры обѣихъ стрѣлокъ равняются нулю. Моторы третьяго класса характеризуются поэтому двумя условіями

$$\mathfrak{I}_1=0, \quad \mathfrak{I}_2=0$$

и имѣютъ одинъ тензоръ $H=0$. Мы раздѣлили ихъ на три типа.

1. Моторы, у которыхъ обѣ стрѣлка имѣютъ абсолютное направленіе. Такіе моторы будемъ называть Л-моторами.

2. Моторы, у которыхъ одна стрѣлка равняется нулю, а другая имѣетъ абсолютное направленіе.

3. Моторы, у которыхъ обѣ стрѣлки равняются нулю.

Разсмотримъ послѣдовательно эти типы.

Когда моторъ принадлежитъ къ первому типу, то стрѣлки его, построенныя для какой нибудь точки приведенія o, не равняются нулю, оси ихъ β и γ имѣютъ вполнѣ опредѣленное направленіе и касаются къ абсолюту. Пусть ось β касается къ абсолюту въ точкѣ b_1, а ось γ въ точкѣ c_1. Проведемъ черезъ точки b_1 и c_1 образующія η_1 и ξ_1 абсолюта, изъ которыхъ первая принадлежитъ къ системѣ η и проходитъ черезъ b_1, а вторая къ системѣ ξ и проходитъ черезъ c_1. Мы показали въ § 55, что прямыя ξ-параллельныя съ β и η-параллельныя съ γ проходятъ всѣ черезъ точку a_1 пересѣченія линій ξ_1 и η_1 и лежатъ въ плоскости этихъ линій касательной къ абсолюту. Всѣ эти прямыя и будутъ осями мотора.

Въ разсматриваемомъ случаѣ точки b_2, c_2 сливаются съ точками b_1, c_1 (§ 87), а образующія ξ_2, η_2 съ ξ_1, η_1. Поэтому поверхности Clifford'а мотора обращаются въ предѣльныя поверхности Лобачевскаго и касаются къ абсолюту вдоль прямыхъ ξ_1 и η_1. Итакъ имѣемъ такую теорему.

Теорема I.—*Л-моторъ имѣетъ* ∞^1 *осей, которыя всѣ лежатъ въ одной плоскости касательной къ абсолюту и проходятъ черезъ ея точку касанія. Поверхности Clifford'а мотора представляютъ собой предѣльныя поверхности Лобачевскаго и касаются къ абсолюту вдоль двухъ образующихъ, которыя проходятъ черезъ точку пересѣченія осей мотора.*

Проведемъ черезъ точку b поверхность Cliffdrd'а C, соотвѣтствующую нашему мотору. Мы знаемъ, что плоскостью приведенія для точки b будетъ служить плоскость X касательная къ C (§ 87). Мы знаемъ кромѣ того, что по свойству предѣльной поверхности C линія ba_1 будетъ нормальна C и перпендикулярна къ X, а линія пересѣченія X съ плоскостью $\xi_1\eta_1$—перпендикулярна къ точкѣ b. Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ такимъ образомъ слѣдующая, представляющая собой частный случай теоремы II § 87.

Теорема II.

Линіи перпендикулярныя къ плоскостямъ приведенія и проходящія черезъ соотвѣтствующія точки приведенія Л-мотора всѣ проходятъ черезъ точку пересѣченія осей мотора и между собой $Л_1$*-параллельны.*

Линіи перпендикулярныя къ точкамъ приведенія и лежащія въ соотвѣтствующихъ плоскостяхъ приведенія Л-мотора всѣ лежатъ въ плоскости осей мотора и всѣ между собой $Л_2$*-параллельны.*

Разсмотримъ какъ измѣняются направленіе оси ротора и луча вектора Л-мотора съ перемѣщеніемъ точки приведенія.

Замѣтимъ прежде всего, что ось ротора и лучъ вектора Л-мотора для всякой точки взаимно перпендикулярны (§ 23), ибо они гармонично сопряжены съ осями стрѣлокъ, а эти послѣднія касаются къ абсолюту.

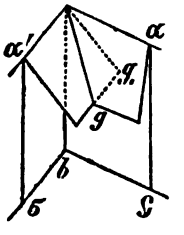
Пусть G и σ суть роторъ и векторъ мотора для точки приведенія b. Проведемъ черезъ точки b, a_1 и оси G и σ соотвѣтственно плоскости A и B, которыя съ плоскостью $\xi_1\eta_1$ пересѣкутся по линіямъ α и α' (см. чертежъ 16). Такъ какъ линія ba_1 по предыдущей теоремѣ перпендикулярна къ оси G и лучу σ, которые въ свою очередь взаимно-перпендикулярны, то плоскости A и B также перпендикулярны и линіи α и α'

проходятъ черезъ полюсы плоскостей A и B соотвѣтственно: линіи α и α' взаимно полярны. Построимъ затѣмъ для какой нибудь точки приведенія o элементы мотора G' и σ':

$$G'=км_o(G)+мм_o(\sigma),\quad \sigma'=мм_o(G)+км_o(\sigma)$$

проведемъ черезъ точку a_1 и оси G' и σ' соотвѣтственно плоскости A' и B' и посмотримъ какъ будутъ измѣняться положенія послѣднихъ съ перемѣщеніемъ точки o. Если точка o находится въ плоскости A, которая перпендикулярна къ лучу σ, то лучи векторовъ $км_o(\sigma)$, $мм_o(G)$, (§ 34), а слѣдовательно и лучъ σ' будутъ перпендикулярны къ плоскости A, оси же роторовъ $мм_o(\sigma)$, $км_o(G)$, а слѣдовательно и ось G' будутъ лежать въ этой плоскости. Лучъ σ' будучи перпендикуренъ къ плоскости A пройдетъ черезъ ея полюсъ, гдѣ пересѣчется съ линіей α': лучъ σ' съ линіей α' лежитъ въ одной плоскости и плоскость B' проведенная черезъ лучъ σ' и точку a_1 пройдетъ и черезъ линію α'. Также и плоскость A', проведенная черезъ ось G' и точку a_1, совпадая съ плоскостью A, пройдетъ черезъ α. Итакъ пока точка o перемѣщается въ плоскости A, плоскости A' и B' проходятъ черезъ α и α'. Очевидно, что это свойство плоскостей A' и B' сохраняется и въ такомъ случаѣ, когда точка o будетъ перемѣщаться въ плоскости B.

Чертежъ 17.



Возьмемъ теперь гдѣ нибудь точку g и черезъ нее и линіи α и α' проведемъ плоскости A_1 и B_1. Пусть g_1 точка на пересѣченіи плоскостей B_1 и A. Когда o совпадаетъ съ g_1, то плоскость A' совпадаетъ съ A, а B' съ B_1, ибо g_1 находится въ плоскости A и по доказанному выше плоскость B' должна проходить черезъ g_1 и линію α', черезъ которыя проходитъ и плоскость B_1. Такимъ образомъ для точки приведенія g_1 плоскости A и B_1 имѣютъ совершенно такое же значеніе, какое плоскости A и B для точки b: онѣ проходятъ черезъ точку a_1 и соотвѣтственно черезъ ось и лучъ элементовъ

мотора для точки g_1. Для насъ особенно важно то обстоятельство, что онѣ кромѣ того проходятъ и черезъ прямыя α и α'. Перемѣстимъ, наконецъ, точку o изъ g_1 въ g. По доказанному выше плоскость B', совпадая съ B_1, своего положенія не измѣнитъ, плоскость же A' повернется вокругъ линіи α и совпадетъ съ A_1, ибо будетъ проходить черезъ точку g и линію α, черезъ которыя проходитъ и плоскость A_1. Итакъ съ какой бы точкой пространства мы ни совмѣстили бы точку o, плоскость A' всегда будетъ проходить черезъ α, плоскость B' черезъ линію α'. Вслѣдствіе того, что линіи α и α' взаимно полярны плоскость A' будетъ перпендикулярна къ B'.

Свойствамъ плоскостей A' и B' по принципу двойственности будутъ соотвѣтствовать свойства точекъ пересѣченія оси $\mathfrak{C}'$ и луча σ' съ плоскостью $\xi_1\eta_1$, точекъ, которыя очевидно будутъ лежать на прямыхъ α и α'. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема III.

Плоскости проведенныя черезъ точку пересѣченія осей Д-мотора и соотвѣтственно черезъ оси роторовъ и лучи векторовъ мотора образуютъ два пучка Д-параллельныхъ плоскостей; оси пучковъ взаимно полярны.

Точки пересѣченія плоскости осей Д-мотора съ осями роторовъ и лучами векторовъ мотора образуютъ два точечныхъ ряда; прямыя несущія ряды взаимно полярны.

Оси пучковъ, о которыхъ идетъ рѣчь въ лѣвой теоремѣ, несутъ ряды, о которой идетъ рѣчь въ правой. Ихъ мы назовемъ главными осями мотора.

Мы знаемъ (§ 87_3), что тензоры ротора и вектора мотора остаются постоянными пока точка приведенія перемѣщается по поверхности Clifford'a, соотвѣтствующей мотору. Вообразивъ двѣ поверхности Clifford'a нашего мотора C и C', будемъ изслѣдовать какъ измѣняются тензоры, когда точка приведенія будетъ переходить съ одной изъ этихъ поверхностей на другую. Съ этою цѣлью примемъ точку приведенія o взятую гдѣ нибудь на поверхности C за начало прямоугольной системы координатъ x,y,z. За ось z возьмемъ линію oa_1 нормальную къ поверхности C и слѣдовательно перпендикулярную къ плоскости приведенія соотвѣтствующей точкѣ o; оси z мы припишемъ такое направленіе, чтобы конечной точкой ея служила точка a_1 пересѣченія осей мотора. Оси x,y возьмемъ въ плоскости приведенія и, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что ось $\mathfrak{C}$ и лучъ σ взаимно перпендику-

лярны, совмѣстимъ ось x съ осью G, ось y съ σ и припишемъ осямъ x,y такія направленія, чтобы уголъ между ними относительно направленія оси z былъ равенъ $\pi/2$. Координаты Л-мотора при такомъ выборѣ осей будутъ

$$X=X,\ Y=0,\ Z=0,\ L=0,\ M=M,\ N=0,$$

причемъ въ силу условій (27), которыя теперь принимаютъ видъ

$$\mathfrak{I}_1=\mathfrak{I}_2=X^2+\varkappa^2M^2=0,$$

$$X=\pm i\varkappa M. \tag{28}$$

Новую точку приведенія o' мы возьмемъ на поверхности C' тамъ, гдѣ она встрѣчается съ осью z. Тсчку o' примемъ за начало новой прямоугольной системы координатъ x',y',z', у которой ось z' совпадаетъ съ осью z, а оси x' и y' лежатъ соотвѣтственно въ плоскостяхъ xz и yz. Если черезъ δ мы означимъ разстояніе между o и o', то при нашемъ выборѣ осей x',y',z' мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned}
l_1&=\cos(\omega\delta)\ , & m_1&=\cos(-\pi/2+\omega\delta), & n_1&=0,\\
l_2&=\cos(\pi/2+\omega\delta), & m_2&=\cos(\omega\delta)\ , & n_2&=0,\\
l_3&=0\ , & m_3&=0\ , & n_3&=1,
\end{aligned}$$

и формулы преобразованія обратятся въ слѣдующія

$$\begin{aligned}
x'&=\ x\cos(\omega\delta)+y\sin(\omega\delta), \quad z'=z;\\
y'&=-x\sin(\omega\delta)+y\cos(\omega\delta),
\end{aligned}$$

развернувъ ихъ и принимая во вниманіе, что

$$x=X=\pm i\varkappa M\,,\quad y=\omega M=\mp\frac{\omega}{\varkappa}iX$$

получимъ

$$X'=Xe^{-i\varkappa\delta},\quad M'=Me^{-i\varkappa\delta}, \tag{29}$$

или

$$X'=Xe^{\ i\varkappa\delta},\quad M'=Me^{\ i\varkappa\delta}, \tag{30}$$

смотря по тому будемъ ли мы въ (28) имѣть верхній или нижній знакъ. Остальныя координаты Y',Z',L',N' мотора всѣ будутъ равны нулю, а потому ось x' будетъ служить осью ротора G', а осью y' лучомъ вектора σ', построенныхъ для тсчки o'; величины X' и M' будутъ тензорами G' и σ' соотвѣт-

ственно. Чтобы рѣшить какой знакъ долженъ быть взятъ въ (28), мы представимъ послѣднія равенства въ другомъ видѣ.

Напомнимъ, что конечною точкой оси z служитъ точка a_1 пересѣченія осей мотора; означая ея начальную точку черезъ a, мы будемъ имѣть

$$\delta=\frac{1}{2i\varkappa}\log(aa_1oo')$$

откуда $$\sqrt{(aa_1oo')}=e^{i\varkappa\delta},$$

и слѣдовательно

или $$X'=X/\sqrt{(aa_1oo')},\quad M'=M/\sqrt{(aa_1oo')}, \tag{31}$$

или $$X'=X\sqrt{(aa_1oo')},\quad M'=M\sqrt{(aa_1oo')}. \tag{32}$$

Если бы были справедливы равенства (31), то при совпаденіи точки o' съ a_1 мы будемъ имѣть

$$X'=\infty,\quad M'=\infty.$$

Но этотъ результатъ противорѣчитъ предположенію, что оси мотора проходятъ черезъ точку a_1; слѣдовательно при нашемъ выборѣ направленія оси z должны имѣть мѣсто соотношенія (30) и (32) и въ равенствѣ (28) долженъ быть взятъ знакъ минусъ.

Проведемъ черезъ точки o и o' плоскости O и O' касательныя къ C и C'. Эти плоскости перпендикулярны къ оси z и образуютъ уголъ $\theta=\varkappa\delta$ (§ 48). Вводя его въ (30), имѣемъ

$$X'=Xe^{i\theta},\quad M'=Me^{i\theta}.$$

Величины X,M,X',M', представляющія собой тензоры ротора и вектора для точекъ o и o', остаются постоянными пока точки o и o' находятся на поверхностяхъ C и C'. Поэтому, какъ видно изъ (29) и (30), δ и θ также не будутъ зависѣть отъ положенія o и o' на этихъ поверхностяхъ лишь бы только линія oo' оставалась къ нимъ нормальной. Величины δ и θ характеризуютъ слѣдовательно относительное положеніе поверхностей C и C'; называя первую разстояніемъ, а вторую угломъ между C и C', мы имѣемъ такимъ образомъ слѣдующую теорему.

Теорема IV — *Когда точка приведенія переходитъ съ одной изъ предѣльныхъ поверхностей Л-мотора на другую, тензоры ротора и вектора измѣняются пропорціонально*

$$e^{ix\delta} \text{ или } e^{i\theta},$$

гдѣ δ и θ разстояніе и уголъ между поверхностями.

Читатель знакомый съ формулами тригонометріи легко можетъ представить эту теорему въ другой формѣ, причемъ становится очевиднымъ, что она представляетъ частный случай теоремы V § 86.

Теорема IV.

Если, принимая точку приведенія за начало вектора Л-мотора, мы будемъ перемѣщать ее по прямой, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія осей мотора, то конецъ вектора также будетъ перемѣщаться по прямой, которая также проходитъ черезъ точку пересѣченія осей мотора и $Л_1$-параллельна съ первой.

Если, принимая плоскость приведенія за начало ротора Л мотора, мы будемъ вращать ее вокругъ прямой, которая лежитъ въ плоскости осей мотора, то конецъ ротора также будетъ вращаться вокругъ прямой, которая также лежитъ въ плоскости осей и $Л_2$-параллельна съ первой.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію моторовъ второго типа. Пусть η-стрѣлка мотора равняется нулю, а ось γ ξ-стрѣлки касается къ абсолюту въ точкѣ c_1. Мы знаемъ, что всѣ линіи η-параллельныя съ γ будутъ касаться къ абсолюту въ точкахъ образующей ξ_1, проходящей черезъ точку c_1 и принадлежащей къ системѣ ξ. Всѣ эти линіи будутъ осями мотора. Если бы ξ-стрѣлка равнялась бы нулю, а ось β η-стрѣлки касалась бы къ абсолюту въ точкѣ b_1, то всѣ оси мотора касались бы къ абсолюту въ точкахъ образующей η_1, принадлежащей къ системѣ η и проходящей черезъ b_1. Итакъ для мотора второго класса теорема § 88 обращается въ слѣдующую.

Теорема V.—*Моторъ третьяго класса и второго типа имѣетъ ∞^2 осей касательныхъ къ абсолюту въ точкахъ образующей, которая принадлежитъ къ системѣ ξ, если равняется нулю η-стрѣлка и—къ системѣ η, если равняется нулю ξ-стрѣлка.*

Такъ какъ условіямъ (27) можно удовлетворить дѣйствительными величинами X,Y,Z,L,M,N, когда x чисто мнимое число, и нельзя, когда x дѣйствительно, то моторъ третьяго

класса можетъ быть дѣйствительнымъ только въ пространствѣ Лобачевскаго. Но въ пространствѣ Лобачевскаго для дѣйствительнаго мотора равенства

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0 \text{ или } \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=0$$

невозможны; въ этомъ пространствѣ стрѣлки дѣйствительнаго мотора не могутъ равняться нулю, а самъ моторъ не можетъ принадлежать ко второму типу. Отсюда такая теорема.

Теорема VI.—*Моторъ третьяго класса можетъ быть дѣйствителенъ только въ пространствѣ Лобачевскаго, когда онъ представляетъ собой Л-моторъ.*

92. **Методъ перенесенія.**—Въ заключеніе своей работы я укажу на нѣкоторыя весьма важныя слѣдствія, вытекающія изъ формулъ, выведенныхъ въ §§ 64 и 65.

Возьмемъ въ Эвклидовомъ пространствѣ прямоугольную систему координатъ $oxyz$ и два вектора α и α' съ общимъ началомъ въ точкѣ o и предположимъ, что векторы α и α' заданы ихъ проэкціями $x,y.z$ и x',y',z' на координатныя оси. Извѣстно, что всѣ формулы и теоремы теоріи связки векторовъ, имѣющей своимъ центромъ начало координатъ, представляютъ собой слѣдствія двухъ формулъ

$$H^2=x^2+y^2+z^2,\ \cos\vartheta=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

изъ которыхъ первая опредѣляетъ длину вектора, а вторая уголъ между направленіями двухъ векторовъ. Но мы видѣли въ §§ 64 и 65, что эти двѣ формулы сохраняютъ геометрическое значеніе и въ томъ случаѣ, когда числа x,y,z, x',y',z', H и ϑ сдѣлаются комплексными числами съ модулемъ умноженія: первая формула даетъ тогда тензоръ мотора, вторая комплексный уголъ между двумя прямыми. Мы можемъ поэтому утверждать, что и всѣ другія формулы теоріи связки векторовъ обратятся въ формулы теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной, если всюду въ нихъ дѣйствительныя числа замѣнимъ комплексными съ модулемъ умноженія. Этотъ результатъ мы можемъ выразить иначе: формулы теоріи связки векторовъ представляютъ собой неразвернутыя формулы теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной.

Равенства, выражающія какую нибудь теорему теоріи связки векторовъ могутъ быть разсматриваемы какъ неразвер-

нутыя равенства теоріи винтовъ и даютъ намъ теорему этой теоріи будучи истолкованы геометрически. Всякая теорема теоріи связки можетъ быть такимъ образомъ преобразована въ теорему теоріи винтовъ. Итакъ мы приходимъ къ такому весьма важному заключенію.

Теорема I.—*Если въ формулахъ и равенствахъ теоріи связки векторовъ замѣнимъ дѣйствительныя числа числами комплексными съ модулемъ операціи умноженія, то всѣ эти формулы и равенства и теоремы, выражаемыя послѣдними, обратятся въ формулы, равенства и теоремы теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной.*

Эту теорему мы можемъ выразить въ другой формѣ.

Извѣстно, что кватерніономъ называется комплексное число

$$q=w+ix+jy+kz$$

въ которомъ w,x,y,z суть дѣйствительныя или обыкновенныя мнимыя числа, а $i.j,k$ комплексныя единицы съ такой таблицей умноженія

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ jk=-kj=i,\ ki=-ki=j,\ ij=-ji=k.$$

Если въ кватерніонѣ дѣйствительныя числа замѣнимъ числами комплексными съ двумя единицами, т. е. положимъ

$$w=w_1e_1+w_2e_2,\ x=x_1e_1+x_2e_2,\ y=y_1e_1+y_2e_2,\ z=z_1e_1+z_2e_2,$$

то кватерніонъ обратится въ комплексное число

$$w_1e_1+w_2e_2+i(x_1e_1+x_2e_2)+j(y_1e_1+y_2e_2)+z(z_1e_1+z_2e_2),$$

которое называется бикватерніономъ и можетъ быть представлено въ видѣ

$$q_1e_1+q_2e_2,$$

гдѣ $\quad q_1=w_1+ix_1+jy_1+kz_1,\quad q_2=w_2+ix_2+jy_2+kz_2$

если предположимъ, что единицы e_1,e_2 коммутативны съ i,j,k. Мы будемъ разсматривать только такіе бикватерніоны, у которыхъ коэффиціенты при единицахъ $1,i.j,k$ принадлежатъ къ системѣ комплексныхъ чиселъ, обладающей модулемъ операціи умноженія. Но мы знаемъ, что операціи надъ числами такой системы подчиняются всѣмъ законамъ обыкновенной алгебры, и что тригонометрическія функціи этихъ чиселъ обладаютъ

совершенно такими же свойствами какъ и тригонометрическія функціи чиселъ дѣйствительныхъ. Мы можемъ поэтому утверждать, что всѣ безъ исключенія формулы теоріи кватерніоновъ обратятся въ формулы теоріи бикватерніоновъ, если въ нихъ кватерніоны замѣнимъ бикватерніонами и всѣ дѣйствительныя числа—комплексными указаннаго типа.

Такъ какъ формулы теоріи кватерніоновъ могутъ быть разсматриваемы какъ формулы теоріи связки векторовъ, то изъ доказанной выше теоремы слѣдуетъ, что теорія бикватерніоновъ можетъ быть истолкована геометрически при помощи теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ какую либо теорему геометріи или механики, которая можетъ быть доказана при помощи кватерніоновъ. Такая теорема выразится однимъ или нѣсколькими равенствами между кватерніонами, равенствами, которыя останутся вѣрными и въ томъ случаѣ, если кватерніоны замѣнимъ бикватерніонами. Слѣдовательно теорема даетъ намъ нѣкоторыя равенства между бикватерніонами, интерпретируя которыя геометрически мы получимъ новую теорему, представляющую обобщеніе первоначальной.

Итакъ мы приходимъ къ такому заключенію.

Теорема II.—*Если въ формулахъ теоріи кватерніоновъ замѣнимъ кватерніоны бикватерніонами и дѣйствительныя числа—числами комплексными съ двумя единицами и съ модулемъ операціи умноженія, то эти формулы обратятся въ формулы теоріи бикватерніоновъ; послѣднія могутъ быть истолкованы геометрически при помощи теоріи винтовъ пространствъ постоянной кривизны. Всякая теорема геометріи или механики, которая можетъ быть доказана помощью теоріи кватерніоновъ, можетъ быть преобразована въ теорему теоріи винтовъ.*

Предыдущія двѣ теоремы даютъ возможность устанавливать аналогіи между нѣкоторыми фигурами и движеніями и фигурами и движеніями болѣе общаго вида и даютъ такимъ образомъ методъ переносить свойства первыхъ, обобщая ихъ, на послѣднія. Въ виду важнаго значенія этого метода позволяю себѣ дать ему особое названіе метода перенесенія. Формулы и теоремы §§ 62—82 представляютъ собой приложеніе этого метода [1].

---

[1] Довольно много различныхъ приложеній метода перенесенія читатель найдетъ въ моемъ сочиненіи «Винтовое счисленіе».

93. **Другая форма метода перенесенія.**—Возратимся снова къ формуламъ

$$\cos\vartheta=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

Если x,y,z и x',y',z' будутъ дѣйствительными числами, и мы примемъ ихъ за прямоугольныя декартовы координаты двухъ точекъ, то эти двѣ формулы будутъ основными формулами Эвклидовой геометріи: первая опредѣлитъ разстояніе между точками (x,y,z) и (x',y',z'), а вторая—уголъ между ихъ радіусами векторами.

Если же числа x,y,z и x',y',z' сдѣлаются комплексными, то они опредѣлятъ два мотора α и α', и формула первая дастъ намъ тензоръ мотора $\alpha'—\alpha$, а вторая—комплексный уголъ между осями α и α'.

Такимъ образомъ двѣ основныя формулы геометріи Эвклидова пространства обращаются въ двѣ основныя формулы теоріи винтовъ пространства постоянной кривизны, если координаты точекъ становятся комплексными числами съ модулемъ операціи умноженія. Мы можемъ быть поэтому увѣрены, что взявъ какую угодно формулу геометріи Эвклидова пространства и замѣнивъ всѣ числа въ нее входящія комплексными числами указаннаго вида, мы преобразуемъ ее въ формулу, которая будетъ имѣть вполнѣ опредѣленный смыслъ въ теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной. Отсюда такая теорема.

Теорема.—*Всѣ формулы аналитической геометріи Эвклидова пространства преобразуются въ формулы теоріи винтовъ пространствъ съ постоянной кривизной, если дѣйствительныя числа, входящія въ формулы, замѣнимъ комплексными съ двумя единицами и съ модулемъ операціи умноженія.*

94. **Преобразованіе геометріи сферы въ геометрію линейчатаго пространства.**—Сфера съ радіусомъ равнымъ единицѣ и съ центромъ въ началѣ координатъ имѣетъ своимъ уравненіемъ

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Если числа x,y,z, удовлетворяя этому уравненію, сдѣлаются комплексными, то они опредѣлятъ моторъ съ тензоромъ равнымъ $\sqrt{1}$. Но такой моторъ вполнѣ можетъ быть заданъ положеніемъ и направленіемъ его оси, соотвѣтствующей тензору $+1$. Поэтому, если прямую, которой приписано опредѣ-

ленное направленіе, назовемъ лучомъ, а совокупность всѣхъ лучей лучевымъ пространствомъ, то будемъ имѣть теорему

Теорема I.—*Методомъ перенесенія сфера преобразуется въ лучевое пространство; геометрія сферы въ геометрію лучевого пространства.*

Если въ уравненіяхъ сферической кривой

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$$

гдѣ t перемѣнный параметръ, x,y,z,t сдѣлаются комплексными, то эти уравненія опредѣлятъ нѣкоторую конгруэнцію лучей, которую назовемъ аналитической. Такимъ образомъ большой кругъ сферы преобразуется въ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ, для которой директрисами служатъ двѣ взаимныя поляры относительно абсолюта, малый кругъ сферы—въ совокупность лучей, которые всѣ съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ лучомъ составляютъ равные комплексные углы.

Аналитическую конгруэнцію мы можемъ опредѣлить какъ конгруэнцію, обладающую однимъ изъ слѣдующихъ свойствъ.

Линіи проведенныя чрезъ какую нибудь точку и $\xi(\eta)$—параллельныя съ лучами аналитической конгруэнціи образуютъ конусъ.

Если мы имѣемъ два конуса и построимъ линіи ξ-параллельныя съ образующими одного и η-параллельныя съ образующими другого, то получимъ аналитическую конгруэнцію.

Линіи проведенныя въ какой нибудь плоскости и $\xi(\eta)$-параллельныя съ лучами аналитической конгруэнціи огибаютъ кривую линію.

Если мы имѣемъ двѣ плоскія кривыя и построимъ линіи ξ-параллельныя съ касательными къ одной изъ кривыхъ и η-параллельныя съ касательными къ другой, то получимъ аналитическую конгруэнцію.

Методъ перенесенія даетъ возможность приложить теорію сферическихъ кривыхъ къ изученію аналитической конгруэнціи. Всѣ понятія связанныя съ сферической кривой, какъ напримѣръ понятіе о длинѣ дуги, о кривизнѣ, о развертк̀ѣ кривой и т. д. могутъ быть перенесены и на аналитическую конгруэнцію. Всѣ формулы и теоремы теоріи сферическихъ кривыхъ могутъ быть преобразованы въ формулы и теоремы теоріи аналитическихъ конгруэнцій. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема II.—*Методомъ перенесенія сферическія кривыя преобразуются въ аналитическія конгруэнціи; всѣ формулы и теоремы теоріи сферическихъ кривыхъ въ формулы и теоремы теоріи аналитическихъ конгруэнцій.*

Теорія аналитической конгруэнціи имѣетъ весьма важное значеніе для теоріи линейчатыхъ поверхностей. Дѣйствительно, нетрудно доказать такую теорему.

Теорема III.—*Если мы имѣемъ какую либо линейчатую поверхность, то существуетъ одна и только одна аналитическая конгруэнція, къ которой принадлежатъ всѣ прямолинейныя образующія поверхности.*

Эта теорема даетъ возможность приложить всю теорію аналитическихъ конгруэнцій къ линейчатымъ поверхностямъ. Мы можемъ такимъ образомъ теорію сферическихъ кривыхъ перенести не только на аналитическія конгруэнціи, но и на линейчатыя поверхности.

95. **Механика мотора.**—Общая теорема § 93 весьма естественно приводитъ къ механикѣ мотора. Желая сохранить аналогію съ механикой точки въ Эвклидовомъ пространствѣ, мы должны назвать скоростью мотора α, координаты котораго x,y,z суть нѣкоторыя функціи времени—дѣйствительнаго перемѣннаго t, или комплекснаго перемѣннаго $t=t_1e_1+t_2e_2$—моторъ β, имѣющій своими координатами

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

ускореніемъ—моторъ β' съ координатами

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2};$$

силой приложенной къ α—произведеніе $m\beta'$, гдѣ m есть нѣкоторое комплексное число—масса мотора α.

Скорость мотора α характеризуетъ съ точностью до величинъ безконечно малыхъ перваго порядка движеніе мотора α въ теченіе безконечно малаго промежутка $\tau=\tau_1e_1+\tau_2e_2$. Такъ $S(\beta/\alpha)$ [1] опредѣляетъ измѣненія $\mathrm{T}(\alpha)$:

$$\frac{1}{\mathrm{T}\alpha}\cdot\frac{d\mathrm{T}\alpha}{dt}=S(\beta/\alpha);$$

моторъ же $V(\beta/\alpha)$ характеризуетъ перемѣщеніе оси α. Движеніе оси α будетъ таково, какъ если бы она принадлежала неизмѣняемой системѣ, движеніе которой опредѣляется моторомъ $\tau V(\beta/\alpha)$. Подобнымъ же образомъ ускореніе перваго и

[1] S есть знакъ скалярной, а V—векторной части бикватерніона.

слѣдующихъ порядковъ опредѣляютъ движеніе мотора въ теченіе промежутка времени τ съ точностью до величинъ второго и слѣдующихъ порядковъ.

Введя и изслѣдовавъ эти понятія, мы будемъ имѣть возможность извѣстнымъ образомъ интерпретировать уравненія и теоремы механики точки или системы точекъ, когда какъ координаты точекъ такъ и массы, силы и время становятся комплексными числами съ двумя единицами и съ модулемъ операціи умноженія.

Понятіе о скорости и ускореніи мотора могутъ быть весьма полезны въ нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Такъ, если мы будемъ разсматривать неизмѣняемую систему какъ совокупность прямыхъ связанныхъ между собой, то методомъ перенесенія кинематика твердаго тѣла, вращающагося вокругъ точки, преобразуется въ кинематику общаго случая движенія. Мы можемъ придти такимъ образомъ къ обобщенію теоремы Coriolis'a, формулы Savary и нѣкоторымъ другимъ интереснымъ результатамъ.

Примѣчаніе къ § 42.

Въ этомъ примѣчаніи я имѣю въ виду главнымъ образомъ дать другое доказательство леммѣ § 42.

Возьмемъ моторъ ϱ, элементами котораго для какой нибудь точки приведенія служатъ векторъ ax и роторъ BY. Означая черезъ ow векторъ мотора ϱ для точки приведенія o, мы имѣемъ

$$ow = \text{км}_o(ax) + \text{мм}_o(BY),$$

или, замѣчая, что $\text{мм}_o(BY) = \text{км}_o(by)$, гдѣ by векторъ полярный съ BY,

$$ow = \text{км}_o(ax) + \text{км}_o(by),$$

или, наконецъ, полагая

$$ou = \text{км}_o(ax),\ ov = \text{км}_o(by),$$
$$ow = ou + ov.$$

По теоремѣ I § 35 мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f(ao)x_1 - f(ox)a_1 + f(ax)o_1, \quad (1234) \\ v_1 &= f(bo)y_1 - f(oy)b_1 + f(by)o_1, \quad (1234) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

откуда $$f(ou) = f(oo)f(ax),\ f(ov) = f(oo)f(by). \quad (2)$$

Далѣе, такъ какъ $ow = ou + ov$, то по формулѣ 7 § 25

$$w_1 = f(oo)f(ou)v_1 + f(oo)f(ov)u_1 - f(ou)f(ov)o_1, \qquad (1234)$$

или, принимая во вниманіе (1) и (2),

$$\sigma w_1 = f(ao)f(by)x_1 + f(bo)f(ax)y_1 + f(ax)f(by)o_1 - \\ - f(xo)f(by)a_1 - f(yo)f(ax)b_1 \qquad (1234)\ (3)$$

гдѣ σ множитель пропорціональности. Такимъ образомъ координаты точки w представляютъ собой линейныя и однородныя функціи координатъ точки o. Отсюда можно вывести много интересныхъ теоремъ. Я обращу вниманіе только на одну.

Теорема I.

Если, принимая точку приведенія o за начало вектора мотора, мы будемъ перемѣщать ее по прямой, то конецъ вектора, w, будетъ перемѣщаться также по прямой, причемъ ряды (o) и (w) будутъ проэктивны.

Если принимая плоскость приведенія O за начало ротора мотора, мы будемъ вращать ее вокругъ прямой, то конецъ ротора, W, будетъ вращаться также вокругъ прямой, причемъ пучки (O) и (W) будутъ проэктивны.

Отсюда слѣдуетъ, что лучи векторовъ (оси роторовъ) мотора построенныхъ для различныхъ точекъ одной и той же прямой линіи (для различныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ одну и ту же прямую линію) служатъ образующими поверхности второго порядка.

Изъ формулы (3) имѣемъ

$$\sigma f(ow) = f(ax)f(by)f(oo).$$

Поэтому, если точка o будетъ лежать на абсолютѣ и $f(oo)=0$, то $f(ow)=0$, что означаетъ, что конецъ w вектора ow лежитъ въ плоскости полярной съ o. Но точка o находится на абсолютѣ и плоскость полярная съ ней касается абсолюта: линія ow будетъ также касательной къ абсолюту. Итакъ имѣемъ теорему.

Теорема II.

Если точка приведенія находится на абсолютѣ, то лучь вектора мотора касается къ абсолюту.

Если плоскость приведенія касается къ абсолюту, то ось ротора мотора проходитъ черезъ точку касанія.

Теоремы I и II даютъ возможность легко доказать основную лемму § 42.

Дѣйствительно пусть o' и o'' какія нибудь точки линіи ε, которая съ абсолютомъ пересѣкается въ точкахъ c и d, пусть $o'w', o''w'', cs, ct$ суть векторы мотора для точекъ приведенія o', o'', c, d. На основаніи теоремы I точки w', w'', s, t будутъ лежать на одной прямой и ряды $(w'w''st)$ и $(o'o''cd)$ проэктивны. Проводя черезъ ε', поляру ε, и черезъ точки w', w'', t, s плоскости $\varepsilon'w', \varepsilon'w'', \varepsilon't, \varepsilon's$ въ пересѣченіи ихъ съ ε мы получаемъ точки e', e'', p, q представляющія собой ортогональныя проэкціи точекъ w', w'', t, s на линію ε. Такъ какъ по построенію рядъ e', e'', p, q перспективенъ съ рядомъ w', w'', t, s, а этотъ послѣдній проэктивенъ съ o', o'', c, d, то

$$(o'o''cd)=(e'e''pq).$$

Но легко видѣть, что точки p и q совпадаютъ съ c и d, ибо по теоремѣ II точка s лежитъ въ плоскости $\varepsilon'c$ касательной къ абсолюту въ точкѣ c, слѣдовательно плоскость $\varepsilon's$ совпадаетъ съ плоскостью $\varepsilon'c$ и пересѣкаетъ ε въ точкѣ p совпадающей съ c. На томъ же основаніи точка q совпадаетъ съ d, и послѣднее равенство можетъ быть написано такимъ образомъ

$$(o'o''cd)=(e'e''cd),$$

откуда, пользуясь извѣстнымъ свойствомъ ангармоническаго отношенія,

$$(cdo'e')=(cdo''e''),$$

и по опредѣленію равныхъ векторовъ

$$o'e'=o''e''.$$

Но $o'e'=\text{пр}_\varepsilon(o'w')$ и $o''e''=\text{пр}_\varepsilon(o''w'')$; лемма такимъ образомъ доказана.